

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGENIEUR-DOCTEUR

PAR

Marcel COURTILLOT

1^{re} THESE — " Application de la programmation linéaire à la
Théorie de l'entreprise "

2^e THESE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 JUIN 1959 devant la Commission d'examen.

MM. G. DARMOIS

Président

DUGUE

VILLE

GUILBAUD

} *Examineurs*

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGENIEUR-DOCTEUR

PAR

Marcel COURTILLOT

1^{RE} THESE — " Application de la programmation linéaire à la
Théorie de l'entreprise "

2^E THESE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 JUIN 1959 devant la Commission d'examen.

MM. G. DARMOIS

Président

DUGUE

VILLE

GUILBAUD

Examinateurs

16

THÈSES

N. O. CHORE
312

PRESENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Monsieur COHEN



Examinée le 20 JUIN 1883 devant la Commission d'examen

MM. O. DARMON
CHEN
VALL
GILBERT

APPLICATION de la PROGRAMMATION LINEAIRE

à la THEORIE de L'ENTREPRISE

1 - POSITION du PROBLEME

Schématiquement, une entreprise de production ou d'arbitrage peut se définir comme une unité économique achetant à un marché fournisseur des biens et des services, les transformant (entreprises de production) ou les transportant dans le temps (entreprises d'arbitrage) et livrant à un marché acheteur d'autres biens et d'autres services, résultats de son activité.

En régime capitaliste, le but de l'entreprise est la maximation de son profit.

Cette maximation n'est pas une opération libre, dépendant uniquement du désir de l'entrepreneur (personne morale ou physique), c'est au contraire une opération assujettie à un certain nombre de contraintes et qui ne peut être réalisée que dans un cadre déterminé.

L'entreprise subit en effet 3 sortes de contraintes dérivant de la définition même de sa fonction économique.

En premier lieu, suivant l'optique Keynésienne, la demande s'avère être l'élément moteur de la vie de l'entreprise. Elle conditionne son existence, et sa mesure détermine le volume de la production.

En second lieu, le marché fournisseur exerce aussi des contraintes sur l'entreprise. La production de l'entreprise est liée à l'offre du marché fournisseur.

Enfin, à côté de ces deux éléments extérieurs à l'entreprise, des éléments propres à la structure et à la fonction de l'entreprise limitent les possibilités de l'entrepreneur dans sa recherche du profit maximum (potentiel de production, politique commerciale, sociale, etc...).

Cette étude vise :

- en premier lieu, à déterminer les axes principaux du comportement de l'entrepreneur dans la recherche du profit maximum, en face de contraintes données,
- en second lieu, à déterminer quelles contraintes doivent être desserrées et dans quel ordre, pour que l'effort d'expansion puisse présenter une rentabilité maximum.

.../...

Cette étude est applicable aussi bien dans le cas d'une entreprise de production (production continue ou travail à la commande) que dans le cas d'une entreprise d'arbitrage.

Dans la première partie, nous étudierons le problème de la maximisation du revenu et discuterons les résultats pour des variations, petites, des paramètres économiques.

Dans la deuxième partie, nous étudierons le problème de l'investissement pour obtenir une rentabilité maximum ; les résultats de cette étude nous permettront ensuite de discuter le problème pour des variations quelconques des paramètres économiques.-

Les principaux résultats mathématiques de ce travail ont fait l'objet d'une note transmise à l'Académie des Sciences par Monsieur Georges DARMOIS (Comptes rendus t.247, pages 670 à 673 - Séance du 18 AOUT 1958).

Je remercie vivement Monsieur Georges DARMOIS qui a bien voulu présider le Jury, Messieurs DUGUE et VILLE qui ont accepté d'en faire partie, ainsi que Monsieur GUILBAUD qui m'a encouragé par ses conseils dans ce travail.

2 - PREMIERE PARTIE - LE PROBLEME de MAXIMATION du REVENU

2-1 - ETUDE QUALITATIVE des CONTRAINTES

Les 3 sortes de contraintes subies par l'entreprise relatives au marché client (demande), au marché fournisseur (offre), et à l'entreprise elle-même, se manifestent suivant les entreprises sous des aspects divers.

Elles ne sont pas indépendantes ; il est nécessaire de les examiner qualitativement, tout au moins schématiquement avant de procéder à une quantification.

2-1-1 - ETUDE de la DEMANDE

Le concept de demande n'est pas uniforme dans la science économique ; il a évolué avec cette science elle-même.

Sans entrer dans les nuances multiples des différents modes de définition, nous considérerons suivant l'optique Keynésienne la demande comme l'élément moteur de la production et pour les besoins de l'étude que nous menons, nous situerons la demande non pas d'après son caractère absolu mais relativement à une entreprise donnée.

La demande d'un bien ou d'un service, offert par une entreprise donnée, dans un intervalle de temps donné, à un prix donné, est la quantité de ce bien ou de ce service que les acheteurs sont disposés à se procurer à ce prix.

Cette définition fait intervenir implicitement comme paramètres causals de la demande, la nature des biens et services offerts, la nature du marché client, la concurrence, le système de prix, le temps.

2-1-1-1 - Influence de la nature des biens et services offerts par l'entreprise.-

Il est classique de distinguer deux catégories de biens :

- les biens fongibles (détruits après leur premier emploi) et
- les biens durables.

Les services par essence même sont fongibles.

En fait, il existe une gradation continue entre le caractère de destruction après usage et le caractère de "durabilité". Il est commode de substituer à cette classification trop normative une définition basée sur la durée d'utilisation ou de consommation des biens et services qui sont offerts. Ce caractère temporel est particulièrement intéressant pour étudier la dynamique de la demande et permet de traiter de manière semblable, aussi bien la demande en machines-outils ou en voitures de tourisme destinées à durer plusieurs années que la demande quotidienne de nourriture.-

2-1-1-2- Influence de la nature du marché client.-

Nous considérerons que les personnes (physiques ou morales) à qui l'entreprise vend des biens ou des services sont les consommateurs de ces biens et services, indépendamment de l'usage ultérieur qu'ils peuvent en faire.

Le concept si controversé de "consommateur final" ne nous intéresse pas ici et pour éviter toute ambiguïté de terminologie, nous appellerons "clients" les consommateurs précédemment définis. (Voir remarque)

Le marché de l'entreprise sera constitué par l'ensemble de ses clients.

Le caractère de la demande varie évidemment suivant le nombre de clients, leur possibilité d'achat, mais aussi suivant le "désidérabilité" des biens et services offerts, elle-même influencée par le système des prix, la concurrence, la personnalisation des biens et services offerts, etc ...

Cette définition du client nous permettra de traiter de manière semblable le cas du marchand des 4 saisons, s'il y a lieu(!), et celui du fabricant d'automobiles.

2-1-1-3- Influence du système de prix et de la concurrence.-

Il est classique de définir en économie générale les situations de concurrence et de monopole et d'en déduire un certain nombre de considérations sur les systèmes de prix.

En fait il existe des nuances multiples entre les abstractions constituées par les notions de concurrence pure et parfaite et la notion de monopole. En pratique d'ailleurs, il est rare de se trouver dans l'un ou l'autre cas.

En dernier ressort, pour les besoins de cette étude, il n'est pas nécessaire de faire intervenir ces notions autrement que dans les relations qui peuvent exister entre les quantités et les prix.

Deux cas sont à examiner :

- indépendance des quantités et des prix dans un certain domaine de prix (comprénant en particulier le cas prix constants).
- variation des prix par paliers, en fonction des quantités (comprénant comme cas limite le ^{cas} prix fonctions continues des quantités)

.../...

REMARQUE.- Nous ne prétendons pas par là que la notion de "consommateur final" ne présente aucune utilité : par exemple il ne sera peut-être pas indifférent à un constructeur de tubes électroniques de connaître la loi de consommation des tubes qu'il fabrique, au niveau du consommateur final, mais nous pensons que puisque ces tubes ne sont que des éléments d'ensembles fabriqués par d'autres constructeurs, il devra se préoccuper bien plus de la demande des constructeurs d'ensembles que de la demande au niveau "consommateur final".

2-1-1-4 - Influence du temps -

Il est évident que la demande doit être relative à un intervalle de temps. Le temps sera donc divisé en un certain nombre de périodes et le calcul de la demande fait par période.

2-1-1-5 - En résumé :

Pour chaque bien ou service susceptible d'être offert par l'entreprise, la demande que nous considérerons est la quantité de ces biens ou de ces services pouvant être achetées à l'entreprise par son marché, durant un intervalle de temps donné.

Cette quantité est :

- soit une variable certaine - cas des entreprises travaillant sur commande ou des entreprises travaillant avec des délais de livraison supérieurs à l'intervalle de temps considéré,
- soit une variable aléatoire à permanence statistique plus ou moins poussée dans le temps (plus cette permanence sera grande, plus l'entreprise pourra adopter un rythme de production continu).

A cette quantité est attaché un prix, soit indépendant, soit fonction de la demande.

Ces caractères de la demande paraissent assez généraux pour pouvoir s'appliquer à la majeure partie des entreprises de production et d'arbitrage, de tous les domaines de l'activité économique.

2-1-2 - ETUDE de l'OFFRE.-

Le concept d'offre est en quelque sorte symétrique du concept de demande.

Pour nos besoins, nous adopterons la définition suivante :

Pour chaque bien ou service susceptible d'être acheté par l'entreprise, l'offre est la quantité de ce bien ou de ce service pouvant être offert par un marché fournisseur, à un prix donné, durant un intervalle de temps donné.

Cette quantité est soit une variable certaine, soit une variable aléatoire ; le prix attaché à cette offre est soit indépendant de la quantité offerte, soit fonction de cette quantité (par paliers ou continuellement).

2-1-3 - ETUDE DES CONTRAINTES PROPRES A L'ENTREPRISE.-

Les contraintes propres à l'entreprise sont de deux sortes :

d'une part, les contraintes de structure, d'autre part les contraintes de comportement.

2-1-3-1 - Les contraintes de structure :

L'entreprise possède des moyens de production (ce terme s'étendant aux entreprises d'arbitrage), de nature diversifiée dont elle ne peut user au-delà de certaines limites physiques, par exemple : parc de machines-outils, surface au sol, aire de stockage, moyen de manutention, etc ...

2-1-3-2 - Les contraintes de comportement :

A côté de ces contraintes physiques, l'entreprise peut s'imposer un certain nombre de contraintes de comportement.

Sur le plan commercial, elle peut désirer mener une politique de vente adaptée à certains impératifs de standing, de prestige ou de concurrence (en mettant sur le marché une certaine quantité d'articles même non rentables).

Sur le plan des achats, sa politique peut être orientée dans un sens bien déterminé : achat à tel fournisseur plutôt qu'à tel autre, même si le premier a des prix plus élevés que le second. Par ailleurs, bien que l'offre soit suffisante dans un certain domaine, l'entreprise peut être amenée à s'interdire de l'utiliser aussi complètement qu'il lui serait souhaitable de le faire. (pénurie de devises ou problèmes de trésorerie).

Sur le plan de la gestion financière, l'entreprise peut s'imposer un certain nombre de contraintes, telles que limitation inférieure ou supérieure du fonds de roulement - limitation du montant de la trésorerie, etc ...

Sur le plan social, l'entreprise peut aussi s'imposer des contraintes telles que limitation des horaires de travail, etc ...

2-1-4 - Le problème de la maximisation du revenu.-

Le revenu est la différence entre le coût des biens et services vendus et le coût des biens et services utilisés pour la production des premiers.

Ce qui se traduit par la relation :

Chiffre d'affaires - coût des biens et services utilisés = revenu,
en appelant chiffre d'affaire, la recette procurée par la vente des biens et services produits.

Les coûts des biens et services utilisés doivent être décomposés en deux classes fondamentalement distinctes : les coûts proportionnels et les coûts fixes.

Les coûts proportionnels ou coûts directs sont les coûts des biens et services consommés proportionnellement à la production, par exemple : matières premières, heures de travail ouvriers, outils, énergie, etc ...

Les coûts fixes ou coûts de structure sont tous les autres coûts qui ne sont pas liés fonctionnellement (au sens mathématique) au volume de la production mais qui en sont soit indépendants, soit liés stochastiquement et qui par suite

ne peuvent être affectés aux différents produits sans arbitraire. (par exemple, les appointements de la direction, de la maîtrise, le coût des services d'entretien, des services généraux, du service commercial, des assurances, etc...).

Les coûts fixes ne sont susceptibles de varier qu'au cas où la structure de l'entreprise varie, en cas d'expansion ou en cas de recession importante.

Ce terme de coûts fixes ne doit néanmoins pas prêter à confusion ; ces coûts sont liés à l'état d'organisation de l'entreprise et peuvent diminuer, par exemple avec une meilleure définition d'organisation. Il conviendrait plutôt de les désigner par le terme "coûts indépendants du volume de la production".

En introduisant cette distinction fondamentale entre ces deux catégories de coûts, nous écrirons les deux relations suivantes :

Chiffre d'affaire - coûts proportionnels = marge bénéficiaire

Marge bénéficiaire - coûts fixes = revenu.

Ce caractère d'indépendance du volume de la production montre que maximiser le revenu revient à maximiser la marge bénéficiaire et ceci compte tenu des contraintes subies par l'entreprise.

Remarque : Le problème de l'affectation des amortissements - Le problème de l'affectation des moyens de production.-

Nous rangeons systématiquement dans la catégorie des coûts fixes les amortissements du matériel et des installations, bien que dans de nombreux cas, ils puissent être affectés proportionnellement à la production. Ceci pour les raisons suivantes :

L'amortissement des investissements est une opération financière destinée à compenser la perte de valeur des investissements et à dégager des "résultats" des sommes permettant soit le remboursement des dettes consécutives aux achats de matériel soit le renouvellement du matériel.

L'amortissement est une opération financière liée à la conjoncture qui s'adresse à des "coûts passés" et non à des coûts présents, comme les coûts proportionnels. Cette opération sera d'autant plus facile à faire que la marge bénéficiaire sera plus importante, mais corrélativement en période de ralentissement économique ou de difficultés passagères, l'entrepreneur pourra fort bien réduire ses amortissements.

Dans une conjoncture donnée, l'entrepreneur arrêtera à partir des 3 types de contraintes examinées précédemment le plan de production lui procu-

.../...

rant la marge bénéficiaire la plus élevée. De ce plan de production résultera un plan d'affectation du matériel.

Bien entendu, une fois l'affectation des moyens de production rationnellement décidée, on pourra définir en comptabilité industrielle le prix de revient dit "technique" obtenu en incorporant aux coûts proportionnels les amortissements correspondants. Mais il est fondamental de remarquer que ces prix de revient sont une conséquence de l'affectation des moyens de production et non l'inverse.-

Remarque :

Il n'est d'ailleurs pas impensable que le prix de revient de certains articles soit supérieur au prix de vente et néanmoins cette façon de procéder sera la meilleure puisque si on supprimait ces articles il serait nécessaire néanmoins d'amortir le matériel inemployé.

2.2 - QUANTIFICATION des CONTRAINTES.-

2-2-1 - Contraintes relatives à la demande :

Nous avons vu que la demande de chaque bien ou service susceptible d'être offert par l'entreprise au marché client pendant un intervalle de temps donné, s'exprime par la quantité de ce bien ou de ce service que le marché peut absorber à ce prix pendant cet intervalle de temps.

La quantification s'effectuera en unités physiques appropriées suivant la nature des biens ou des services (nombre d'articles, heures, tonnes, mètres carrés, kilowatts, etc...)

En fait, il importe de laisser à l'entreprise la possibilité de choix (sinon il n'y aurait pas de problème, suivant le cas l'entreprise pourrait ou ne pourrait pas satisfaire la demande).

Dans le cas où la demande correspondra à une commande acceptée, la quantité de biens ou de services à produire sera égale à cette quantité. (le terme de production étant pris dans son sens le plus général et applicable aussi bien aux entreprises d'arbitrage qu'aux entreprises de production).

Dans les autres cas, la quantité à produire sera au plus égale à la valeur de la demande.

Nous avons vu aussi que la politique commerciale de l'entreprise pouvait conduire à mettre un produit donné sur le marché en quantité au moins égale à une certaine valeur.

Finalement, en appelant :

x_i : la quantité du bien ou service i à produire

V_i : la limite supérieure de la demande

V'_i : la limite inférieure de la demande

$p_i(x_i)$: le prix de vente unitaire du bien ou service i en quantité x_i

la quantification de la demande de chaque article se présentera sous la forme de relations :

$$V'_i \leq x_i \leq V_i$$

Prix de vente de l'unité de bien ou de service i en quantité x_i , $= p(x_i)$.

Dans le cas de commande acceptée : $x_i = V_i = V'_i$

2-2-2 - Contraintes relatives à l'offre :

La quantification des contraintes relatives au marché fournisseur se fera en général d'une manière analogue à la quantification des contraintes relatives au marché client.

.../...

Après avoir distingué autant de classes différentes de biens et services qu'il y a de biens et services de nature différente, susceptibles d'être utilisés par l'entreprise, on choisira dans chaque classe une unité physique appropriée. (nombre d'articles ouvrés ou semi-ouvrés, poids, volume, etc...).

De même que pour la demande, la quantification sera relative à un intervalle de temps. Il importera de distinguer le cas d'une offre acceptée de celui d'une offre potentielle ou virtuelle. De plus, chaque offre sera caractérisée par son prix.

En appelant y_j la quantité de bien ou de service j utilisé par l'entreprise,

U_j la limite supérieure de l'offre

U'_j la limite inférieure de l'offre

$q_j(y_j)$ le prix d'achat unitaire de la quantité y_j de bien ou de service j

La quantification de l'offre sera caractérisée par :

$$U'_j \leq y_j \leq U_j$$

Prix d'achat unitaire = $p(y_j)$.

Dans le cas de commande acceptée : $y_j = U_j = U'_j$

REMARQUE.-

La limitation inférieure de l'offre peut se produire dans le cas où l'entreprise est obligée pour diverses raisons d'accepter au moins une quantité déterminée de tel ou tel service, par exemple : main-d'oeuvre déficiente, etc...

2-2-3 - Contraintes relatives au potentiel de production :

Les biens ou services à la disposition de l'entrepreneur et couramment désignés par le terme "potentiel de production de l'entreprise" se présentent comme des biens ou services offerts par un marché fournisseur de nature particulière.

Tout ce qui a été dit pour celui-ci peut donc se transposer ici : néanmoins, il importe de remarquer qu'en général la limite inférieure de l'offre n'existe pas - à moins que l'entrepreneur ne décide d'un seuil de production pour chaque bien ou service.

Le prix de ces biens et services n'interviendra que dans la mesure où il y a consommation proportionnelle à la production.

Compte tenu de ces remarques, la quantification se présentera sous une forme mathématique analogue à celle de l'offre.

Comme précédemment, il importera de définir des classes homogènes de biens ou services différents et de choisir une unité de mesure appropriée.

Ce choix ne sera pas toujours évident d'ailleurs et motivera parfois une véritable mesure de la productivité.

En général, pour une entreprise de production, il s'agira de services disponibles, sous forme de temps de travail pour chaque catégorie homogène de matériel. Pour une entreprise d'arbitrage, il s'agira du service des magasins et de moyens de manutention.

2-2-4 - Quantification des consommations.-

Les biens et services utilisés par l'entreprise dans sa production peuvent être appelés "ressources". Aux biens et services achetés au marché fournisseur correspondront les "ressources extérieures" et aux biens et services du "potentiel de production", les "ressources propres".

Aux ressources consommées proportionnellement à la fabrication correspondront les coûts proportionnels ; aux ressources consommées indépendamment de la fabrication correspondront les coûts fixes.

Il importe de quantifier ces consommations pour comparer les consommations totales aux ressources disponibles. On déterminera donc, pour chaque bien ou service susceptible d'être produit par l'entreprise, les coefficients unitaires de consommation de chaque ressource.

Il conviendra, comme pour la quantification des contraintes, de distinguer autant de classes qu'il y a de natures différentes de biens et services consommés. Evidemment, les unités seront les mêmes pour la mesure des ressources que pour celle des consommations.

Dans certains cas, une étude de productivité sera nécessaire, en particulier dans le cas où une même ressource peut être obtenue par plusieurs dispositifs à productivité différente. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant.

Finalement, il sera possible de caractériser par un nombre a_{ij} la consommation unitaire de ressource j pour chaque bien ou service i , susceptible d'être produit.

2-3 - MISE en EQUATION du PROBLEME.-

La mise en équation du problème doit être divisée en deux parties :

- La mise en équation des contraintes
- La mise en équation de la maximation du revenu.

2-3-1- Mise en équation des contraintes :

Soient :

- x_i , le nombre d'unités du bien ou service i susceptible d'être produit pendant la période considérée,
- a_{ij} la consommation unitaire de ressource j pour le bien i ,
- b_j et b'_j , les limites supérieure et inférieure des disponibilités de ressource j pendant la période considérée (les biens et services mis à la disposition de l'entreprise par le marché fournisseur ou l'entreprise elle-même constituant des ressources).
- V_i et V'_i , les limites supérieure et inférieure de la demande en bien i pendant la période considérée.

La mise en équation des contraintes exprimera que la quantité de ressource consommée et le volume de fabrication doivent être compris entre les limites imposées par les contraintes.

$$\begin{aligned} b'_j &\leq \sum_i a_{ij} x_i \leq b_j && \text{(autant de relations que de ressources)} \\ V'_i &\leq x_i \leq V_i && \text{(autant de relations que de biens ou services produits).} \end{aligned}$$

REMARQUES --

- 1°) - Dans le cas où les produits ne peuvent pas être fabriqués indépendamment les uns des autres - sous-produits ou produits liés - il conviendra de traduire ces contraintes de liaison par des équations de la forme :

$$x_{ij} = \sum_k \lambda_{ik} x_k$$

On supposera par la suite que ces équations sont linéaires, autrement dit, les coefficients de liaison λ sont indépendants des quantités x . De telles relations de liaison sont fondamentales dans le cas où les articles mis sur le marché sont constitués par l'assemblage d'ensembles fabriqués séparément (moteur, boîte de vitesses, caisses, dans le cas d'une voiture).

.../...

2°) - Il est possible qu'une classe homogène de ressources soit composée de moyens de production hétérogènes, par exemple, supposons avoir affaire à une entreprise de mécanique dont le parc de tours est tel que tous les tours puissent produire tous les articles que l'entreprise envisage de fabriquer, mais que les machines aient une productivité différente).

Dans un tel cas, la mise en équation du problème peut être menée par deux méthodes différentes :

a) - méthode de la consommation moyenne

Si t_{ik} est le temps nécessaire à la production d'un article i sur le tour k , on définira un temps moyen par article $\bar{t}_i = \frac{\sum_k t_{ik}}{n}$, ce qui revient à admettre un parc de machines identiques.

b) - Méthode de la consommation différenciée -

Si T_k est le temps de fabrication disponible sur le tour k pendant la période de temps considérée et x_{ik} le nombre d'articles i à produire sur le tour k , le nombre d'articles i total produit sera :

$$x_i = \sum_k x_{ik} \quad (\text{pour tous les articles})$$

Compte tenu des limitations des possibilités des machines k ,

$$\sum_i x_{ik} t_{ik} \leq T_k \quad (\text{pour toutes les machines})$$

C'est la détermination des inconnues x_{ik} , qui fixera à l'intérieur de la classe des tours, l'affectation des moyens de production.

Supposons que l'atelier de tournage soit suivi d'un atelier de rectification. En désignant avec des indices les quantités homologues, on aura :

$$x_i = \sum_k x_{ik} = \sum_k x'_{ik} \quad \text{exprimant l'égalité des flux dans les deux ateliers.}$$

$$\sum_i x'_{ik} t'_{ik} \leq T'_k \quad \text{exprimant les contraintes pour la rectifieuse } k.$$

Cette méthode est évidemment plus correcte que la méthode de la consommation moyenne et elle résoud le problème de l'affectation des ressources au niveau de la machine, alors que la méthode de la consommation moyenne la résoud seulement au niveau "ressources".

Elle est cependant plus lourde, parce qu'elle conduit à un nombre de relations relativement plus élevé. On évitera donc de l'appliquer, sauf si les coefficients de consommation d'une même ressource sont trop dispersés.

On peut remarquer qu'en sommant les équations exprimant les contraintes dues aux machines, on a :

$$\sum_{ik} x_{ik} t_{ik} \leq \sum_k T_k$$

Or :

$$\sum_{ik} x_{ik} t_{ik} = \sum_i \sum_k x_{ik} t_{ik} = \sum_i \left[\left(\sum_k x_{ik} \right) \left(\sum_k \frac{t_{ik}}{n_i} \right) + n_i \rho \sigma_{x_i} \sigma_{t_i} \right]$$

d'après la définition même du coefficient de corrélation entre x et t et en appelant n_i le nombre de machines produisant l'article i.

Soit :

$$\sum_i \left[x_i \cdot \sum_k \frac{t_{ik}}{n_i} + n_i \rho \sigma_{x_i} \sigma_{t_i} \right] \leq \sum_k T_k$$

La méthode de la consommation moyenne aurait donné :

$$\sum_i x_i \cdot \bar{t}_i \leq \sum_k T_k$$

L'erreur commise par la méthode de consommation moyenne est :

$$\sum_i \left[x_i (\bar{t}_i - \sum_k \frac{t_{ik}}{n_i}) - n_i \rho \sigma_{x_i} \sigma_{t_i} \right]$$

En moyenne, $\sum_k \frac{t_{ik}}{n_i} = \bar{t}_i$ et le terme $n_i \rho \sigma_{x_i} \sigma_{t_i}$ est nul

si $\sigma_t \neq 0$, donc en pratique, si la dispersion des temps de fabrication est faible.

Comme ρ est négatif, puisque les machines les plus productives seront les plus chargées, on voit que la méthode de la consommation moyenne conduit à majorer le coefficient de consommation réel, ou ce qui revient au même, à diminuer le montant de la ressource disponible.

La méthode de la consommation moyenne permettra donc une estimation par défaut du revenu maximum.

2-3-2 - Mise en équation de la maximisation du revenu.-

La quantité de ressource j consommée étant $y_j = \sum_i a_{ij} x_i$, le prix d'achat de l'unité de ressource sera $q_j(\sum_i a_{ij} x_i)$ (en supposant le prix d'achat fonction des quantités consommées), et comme a_{ij} est le coefficient de consommation unitaire de ressource j pour le bien ou service i , la somme des coûts directs pour la production d'une unité de bien i sera :

$$\sum_j a_{ij} q_j(\sum_i a_{ij} x_i)$$

Le prix de vente de l'unité de bien ou service i étant $p_i(x_i)$, en supposant le prix de vente fonction des quantités, la marge bénéficiaire unitaire sera :

$$c_i = p_i(x_i) - \sum_j a_{ij} q_j(\sum_i a_{ij} x_i)$$

La marge bénéficiaire totale sera donc :

$$\varphi = \sum_i c_i x_i = \sum_i [p_i(x_i) - \sum_j a_{ij} q_j(\sum_i a_{ij} x_i)] x_i$$

C'est elle qu'il faudra rendre maximum pour maximiser le revenu.

REMARQUES.-

1°) - Dans le cas de la méthode de la consommation différenciée, les quantités x_{ik} étant des quantités de bien ou de service i , dont on sait accessoirement qu'elles sont produites sur la machine k , seront affectées de la marge bénéficiaire c_i .

2°) - Les sous-ensembles d'un ensemble livrés au marché client sont liés quantitativement à cet ensemble par les équations de liaison.

Dans la fonction économique, ces quantités seront affectées d'une marge bénéficiaire nulle, puisqu'elles ne sont pas vendues séparément.

Par contre, les sous-produits seront évidemment affectés d'une marge bénéficiaire puisqu'ils seront vendus.

Dans une première étape, nous envisagerons le cas le plus simple où les marges bénéficiaires c_i sont indépendantes des quantités ; ce cas correspond à celui d'une entreprise d'arbitrage ou de production, travaillant en continu pendant la période de temps considérée, qui se trouve devant un marché très demandeur ou qui a établi des quotas de vente pour son réseau commercial.

Il correspond aussi au cas d'une entreprise travaillant à la commande, pour laquelle se pose un problème de choix dans l'acceptation des commandes qui lui sont soumises.

On peut remarquer que dans ce cas la quantification des ressources doit mettre en évidence la quantité de ressources restant disponible pendant la période considérée, c'est-à-dire que l'entreprise tiendra compte des travaux déjà acceptés pour cette période.

2-3-3 - Le problème en tant que problème de programmation linéaire.-

Le problème économique étudié se pose mathématiquement de la façon suivante :

Rendre maximum une fonction linéaire

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

Compte tenu de m contraintes représentées par les inéquations

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \leq b_j \quad y_i \geq 0 \quad (j \text{ variant de } 1 \text{ à } m)$$

ce problème est un problème de programmation linéaire.

Nous supposons connue la méthode de résolution, en particulier la méthode SIMPLEXE, due à G.B. DANTZIG. Néanmoins, nous rappellerons les résultats principaux de la théorie dans le but de donner une forme nouvelle à quelques points essentiels.

2-3-4 - Rappel des points principaux de la méthode SIMPLEXE.-

- a) - En introduisant les variables d'écart qui transforment le système d'inéquations en système d'équations linéaires, le problème consiste à rendre maximum

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

compte tenu de :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = b_j \quad (j \text{ variant de } 1 \text{ à } m)$$

$$y_i \geq 0$$

Si on considère les y_i comme les n coordonnées (positives) d'un élément y appartenant à un espace vectoriel A_n à n dimensions et les b_j comme les m coordonnées d'un élément P_0 appartenant à un espace vectoriel B_m à m dimen-

sions, on voit que le système d'équations précédent définit une application linéaire de A_n dans B_m , telle que :

$$f(y) = P_0.$$

b) - Les éléments "y" satisfaisant à cette relation, forment un sous-ensemble Y de A_n , tel que :

$$f(y) = P_0.$$

Y est donc l'image réciproque de P_0 .

c) - Les éléments y satisfaisant à $f(y) = P_0$ doivent avoir relativement à une base appropriée, leurs coordonnées positives ou nulles (puisque les inconnues sont des quantités de biens ou de services).

Si y_1 et y_2 appartiennent à Y :

$$z = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

a ses coordonnées non négatives.

L'application (f) étant linéaire,

$$f(z) = f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) = \lambda P_0 + (1-\lambda)P_0 = P_0.$$

d'où : $f(z) = P_0$.

et par suite : z appartient à Y.

Le sous-ensemble Y de A_n contient tous les éléments d'un segment $y_1 y_2$ quelconque si y_1 et y_2 appartiennent à Y.

Y est donc convexe.

d) - L'équation $f(y) = P_0$ peut s'écrire en notation matricielle :

$$A y = P_0.$$

A est la matrice des a_{ij} .

Y et P_0 sont les matrices colonnes formées à partir des coordonnées de y et P_0 .

Sous cette forme, on peut voir qu'aux vecteurs de base : $E_k (00 \dots 1 \dots 0)$ de l'espace A_n correspondent leurs transformés $P_k (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}) = f(E_k)$ de l'espace B_m , de telle sorte que la relation

$$f(y) = P_0.$$

peut aussi s'écrire :

$$y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_n P_n = P.$$

e) - On démontre que la fonction économique $\varphi(y)$ est maximum en un point extrême de Y (c'est-à-dire un élément de Y non susceptible de s'exprimer sous la forme :

$$y_i = \sum_{i \in A} \lambda_i y_i \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i, \quad y_i \in A_n$$

f) - Si on trouve une famille de m vecteurs P_i indépendants, tels que $P = \sum_{i=1}^m u_i P_i$ on démontre que l'élément $y \in Y$ de coordonnées $(y_1 = U_1 \dots y_2 = U_2 \dots y_m = U_m, y_{m+1} = 0 \dots y_n = 0)$, est un point extrême de Y.

g) - La fonction $\varphi(y)$ sera maximum en ce point si la condition supplémentaire suivante est réalisée :

$$z_k - c_k \geq 0 \quad (\text{pour tout } k)$$

avec :

$$z_k = \sum_{i=1}^m y_{ik} c_i$$

en appelant y_{ik} la projection du vecteur P_k sur le vecteur de base P_i appartenant à la base $(P_1, \dots, P_m)$, c_i et c_k les coefficients de y_i et y_k , dans $\varphi(y)$

h) - Il est commode de présenter les calculs sous la forme d'une matrice donnant dans la base $P_1 \dots P_i \dots P_m$ les composantes y_{ik} de chacun de n vecteurs P_k ainsi que les valeurs $z_k - c_k$.

Un algorithme simple permet à partir d'un point extrême donné de cheminer sur la frontière de l'ensemble Y, de manière à augmenter la fonction économique jusqu'à son maximum.

2-4 - EXTENSION de l'ETUDE de PROGRAMMATION LINEAIRE.-

Les résultats classiques précédents une fois rappelés, nous développerons les points suivants :

2-4-1 - Notion de structure :

On appellera structure d'ordre m tout ensemble de m vecteurs P_i indépendants, pris parmi les n transformés des E_i , et tels que :

$$\sum_i y_i P_i = P_0 \quad y_i \geq 0$$

Plus généralement on appellera structure toute famille de vecteurs P_i de rang égal à la dimension de l'ensemble contenant P_0 .

On appellera structure de maximum toute structure rendant maximum la fonction linéaire $\varphi(y)$

D'après ce qui est dit au point (f) du paragraphe 2-3-4, à toute structure correspondra au moins un point extrême de l'ensemble convexe Y.

En général, la structure du maximum sera unique, mais dans certains cas (dégénérescence), il pourra y avoir plusieurs structures de maximum.

On appellera structure active d'ordre k toute structure comportant k vecteurs P_i , tels que les y_i correspondants ne soient pas des variables d'écart.

On remarque que si dans le système de m équations à n inconnues, il y a p variables d'écart, il y aura au maximum $C_{n-p}^m C_p^{m-n}$ structures actives d'ordre k.

Il y aura de même au plus C_n^m structures actives d'ordre quelconque.

2-4-2 - Formulation nouvelle des conditions du maximum :

Les conditions du point (g) du paragraphe 2-3-4 précédent indiquent qu'une structure est maximum si :

$$y_i \geq 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ appartenant à l'ensemble } 1 \dots n)$$

$$C_k - z_k \leq 0 \quad (\text{pour tout } k \text{ appartenant à l'ensemble } 1 \dots m)$$

La structure correspondante est telle que :

$$\sum_i y_i P_i = P_0$$

donc :

$$y_i = \frac{(P_1 \dots P_0 \dots P_m)}{(P_1 \dots P_i \dots P_m)}$$

.../...

en appelant $(P_1 \dots P_i \dots P_n)$ le déterminant formé avec les composantes des vecteurs de la structure, et $(P_1 \dots P_0 \dots P_m)$ ce même déterminant où P_i a été remplacé par P_0 .

Comme les vecteurs $P_1 \dots P_m$ de la structure du maximum constituent une base de l'espace B_m , tous les vecteurs P_k peuvent être rapportés à cette base.

$$P_k = \sum_{i=1}^m y_{ik} P_i$$

et :

$$z_k = \sum_{i=1}^m y_{ik} c_i$$

Par suite le déterminant :

$$\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & z_k \end{vmatrix}$$

est nul (la dernière colonne est fonction linéaire des colonnes précédentes).

En remarquant que :

$$\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & c_k \end{vmatrix} + (z_k - c_k) \begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{vmatrix}$$

on a :

$$c_k - z_k = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & c_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{vmatrix}}$$

Les conditions pour que la structure $P_1 \dots P_m$ soit structure de maximum sont donc :

$$\frac{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_0 & \dots & P_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_i & \dots & P_m \end{vmatrix}} \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } P_i \text{ appartienne à la structure}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & c_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{vmatrix}} \leq 0 \quad \text{pour tout } k.$$

REMARQUE : Sous cette forme, il est évident que $c_z - z_k = 0$, pour tout vecteur P_k appartenant à la structure.

2-4-3 - On peut toujours définir une affectation des indices aux vecteurs P_i pour que le déterminant $(P_1 \dots P_m)$ soit positif. Le cas où le déterminant serait nul n'est pas à envisager, car la famille des vecteurs $P_1 \dots P_m$ ne serait plus libre.

Les équations précédentes exprimant les conditions du maximum deviennent :

$$\textcircled{1} \quad (P_1 \dots P_0 \dots P_m) \geq 0$$

P_0 étant substitué à chacun des m vecteurs P_i de la structure

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_m & P_k \\ c_1 & \dots & c_m & c_k \end{vmatrix} \leq 0$$

pour tout k correspondant aux variables $y_1 \dots y_n$

Les équations 1 ne font pas intervenir les coefficients c_i de la fonction économique. Les conditions 2 ne font pas intervenir le vecteur P_0 .

En conséquence, PROPOSITION 1 :

Si la structure $P_1 \dots P_m$ est structure du maximum pour un point P_0 de l'espace B_m , elle le restera si P_0 varie, tant que P_0 appartiendra à un sous-ensemble de B_m défini par les conditions 1.

2-4-4 - Si la structure du maximum est active d'ordre p , il y a p variables actives et par suite $m - p$ variables d'écart, dont les vecteurs P_i correspondants appartiennent à la structure.

En annulant dans le système d'équations initial les variables dont les vecteurs P_i ne font pas partie de la structure du maximum, on a un système de m équations indépendantes à m inconnues.

Comme chaque variable d'écart ne figure que dans une seule équation, il y a p équations de ce système où ne figure pas de variable d'écart. Ces équations seront appelées les équations principales du système et les composantes de P_0 correspondantes, les coordonnées strictes de P_0 .

D'où la PROPOSITION 2 :

Si la structure du maximum est active d'ordre p , les p variables actives s'expriment uniquement en fonction des p coordonnées strictes de P_0 et par suite, le maximum de la fonction économique est uniquement fonction des coordonnées strictes de P_0 .

2-4-5 - Le système d'équations initial après introduction des variables d'écart est de la forme

$$\sum_i^n a_{ij} y_i = b_j \quad j \in (1 \dots m)$$

Soit $e_1 \dots e_m$ une "base initiale" de B_m telle que :

$$P_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} e_j$$

A cette base initiale correspond le tableau Simplexe initial représentant les composantes de tous les vecteurs P_i dans cette base. Autrement dit, à tout vecteur P_i correspond une matrice colonne (P_i) d'ordre $(m,1)$.

Soit de même la base du maximum $P_1 \dots P_m$, le tableau Simplexe correspondant représentera les composantes y_{ik} de tout vecteur P_k . A tout vecteur P_k correspondra une matrice colonne Π_k .

Les composantes des vecteurs $P_1 \dots P_m$ de la base du maximum dans la base initiale $e_1 \dots e_m$ forment une matrice régulière A .

Les composantes des vecteurs $e_1 \dots e_m$ de la base initiale dans la base du maximum $P_1 \dots P_m$ forment une matrice régulière B .

Il est immédiat que : $B = A^{-1}$

et que : $\Pi_i = A^{-1} P_i$ pour tout vecteur P_i .

En particulier les composantes de P_0 dans la base du maximum seront données par :

$$\Pi_0 = A^{-1} P_0$$

et le maximum de la fonction économique est :

$$\varphi(\hat{y}) = C' \Pi_0$$

C' étant la matrice $m, 1$ formée des m coefficients c_i correspondant aux vecteurs de la base du maximum.

Si on remarque que la variable d'écart de la jème équation entraîne l'existence d'un vecteur P_j identique à e_j , au cas où le premier membre de l'inégalité initiale est inférieur à b_j , et d'un vecteur P_j égal à $-e_j$ dans le cas contraire, on voit que les éléments de B sont donnés au signe près par les composantes des vecteurs P_j relatifs aux variables d'écart.

Par suite, $C'B$ est une matrice $1, m$ dont les composantes sont au signe près les z_j relatifs aux variables d'écart. Ces z_j sont positifs ou nuls, car dans la solution du maximum $z_k - c_k$ est positif ou nul pour tout k et $c_k = 0$ pour les variables d'écart.

.../...

Si on remarque que les z_k relatifs aux coordonnées non strictes sont nuls, puisque le vecteur P_k correspondant appartient à la structure du maximum, on peut énoncer :

PROPOSITION 3 -

La fonction économique est fonction linéaire des coordonnées strictes de P_0 dans la base initiale. Le coefficient d'une ressource stricte b_j est la valeur de $z_k - c_k$ correspondant à la variable d'écart (nulle) de la jème équation. Il est précédé du signe + si la coordonnée stricte est atteinte inférieurement, du signe - dans le cas contraire.

PROPOSITION 4 -

Si on fait varier de Δb_j la jème coordonnée stricte b_j de P_0 dans la base $e_1 \dots e_m$, les coordonnées y_k de P_0 , dans la base formée par les vecteurs de la structure du maximum, varient de $\epsilon_j y_{kj} \Delta b_j$ et la marge bénéficiaire varie de $\epsilon_j (z_j - c_j) \Delta b_j$; y_{kj} étant la composante sur le vecteur P_k de la base du maximum du vecteur P_j correspondant à la variable d'écart (nulle) relative à la coordonnée stricte b_j , ϵ_j est le signe précédant la variable b_j dans les équations initiales.

Démonstration :

D'après ce qui a été vu précédemment, (proposition 3)

$$\Pi_0 = B P_0$$

d'où :

$$\Delta \Pi_0 = B \Delta P_0$$

ΔP_0 = matrice $m, 1$ dont tous les éléments sont nuls, sauf le jème égal à Δb_j

Le produit matriciel montre que $B \Delta P_0$ est le produit par Δb_j des composantes dans la base du maximum du vecteur e_j de la base initiale.

Ces composantes sont les mêmes que celles du vecteur P_j correspondant à la variable d'écart de la jème équation, si elle est précédée du signe + dans les équations initiales. Ce sont les composantes de ce même vecteur, changées de signe dans le cas contraire.

.../...

Il en résulte que la variation de marge bénéficiaire est :

$$\varepsilon_j \sum_k y_{kj} c_k \Delta b_j = \varepsilon_j z_j \Delta b_j$$

et comme $C_j = 0$, cette variation est aussi égale à :

$$\varepsilon_j (z_j - c_j) \Delta b_j$$

On retrouve le résultat de la proposition 3.-

2-4-7 - PROPOSITION 5. -

Si on modifie le programme optimum en donnant des valeurs positives aux variables y_k ne faisant pas partie de la solution du maximum, la variation de la fonction économique est : $\sum_k y_k (c_k - z_k)$

Démonstration :

La solution du maximum est telle que :

$$\sum_i y_i P_i = P_0$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum_i y_i P_i + \sum_k y_k P_k - \sum_k y_k P_k = P_0$$

Dans la base du maximum

$$P_k = \sum_{i=1}^m y_{ik} P_i$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^m (y_i - \sum_k y_k y_{ik}) P_i + \sum_k y_k P_k = P_0$$

.../...

Les variables y_i deviennent : $y_i - \sum_k y_k y_{ik}$

Evidemment les y_k doivent être choisies de façon à ce que les nouvelles variables soient non négatives.

La fonction économique devient :

$$\begin{aligned}\varphi' &= \sum_i (y_i - \sum_k y_k y_{ik}) c_i + \sum_k y_k c_k \\ &= \sum_i c_i y_i + \sum_k y_k (c_k - \sum_i y_{ik} c_i) \\ &= \varphi + \sum_k y_k (c_k - z_k)\end{aligned}$$

$$\text{et } \varphi' - \varphi = \sum_k y_k (c_k - z_k)$$

Si on donne la valeur 1 à une seule variable y_k :

$$\Delta \varphi = c_k - z_k$$

Si y_k est une variable active, $c_k - z_k$ est la variation marginale de marge bénéficiaire relative à cette variable active.

Si y_k est une variable d'écart précédée du signe + dans les équations initiales, $c_k - z_k$ est la variation de marge bénéficiaire due à une unité en moins de la coordonnée stricte correspondante. On retrouve bien le fait que $z_k - c_k$ est un coefficient d'une coordonnée stricte dans la fonction économique.

2-4-8 - PROPOSITION 6.-

Si on fait varier d'une quantité petite δa_{ij} le coefficient de consommation unitaire du produit i , relativement à la ressource j , la marge bénéficiaire varie de $-\left[q_j + \varepsilon_j (z_j - c_j)\right] y_i \delta a_{ij}$, q_j étant le prix de l'unité de ressource j , $z_j - c_j$ correspond à la variable d'écart relative à la ressource b_j , $\varepsilon_j = \pm 1$ suivant le signe de l'inégalité initiale, y_i la quantité du produit i fabriqué.

Démonstration :

En dérivant la relation $\varphi = C' A^{-1} P_0$ par rapport à a_{ij} , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{ij}} &= \left[\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} A^{-1} + C' \frac{\partial A^{-1}}{\partial a_{ij}} \right] P_0 \\ &= \left[\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} A^{-1} - C' A^{-1} \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} A^{-1} \right] P_0 \\ &= \left[\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} - C' A^{-1} \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} \right] A^{-1} P_0 \\ &= \left[\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} - C' B \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} \right] \Pi_0\end{aligned}$$

La matrice C' est $(C_1, C_2 \dots C_i \dots C_m)$

Pour tout i , on a : $C_i = p_i - \sum_j a_{ij} q_j$ (voir définition de la marge bénéficiaire relative au produit i).

Par suite :

$$\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} = [0 \ 0 \dots -q_j \dots 0 \ 0] \quad q_j \text{ étant au rang } i$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = \text{Matrice (mm) dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément situé dans la ligne } j, \text{ colonne } i, \text{ égal à } 1.$$

Si on appelle w_k la matrice $(m, 1)$ dont tous les éléments sont nuls sauf le $k^{\text{ème}}$, on a :

$$\frac{\partial C'}{\partial a_{ij}} = -w_i q_j$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = [0 \ 0 \dots w_j \dots 0 \ 0] \quad w_j \text{ étant au rang } i.$$

par suite :
$$C' B \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = [0 \ 0 \dots C' B w_j \dots 0 \ 0]$$

En se reportant au tableau SIMPLEXE, on voit que $C' B w_j$ est égal au signe près - suivant le signe précédant la variable d'écart, relatif à la coordonnée b_j - à la valeur de $z_j - c_j$ correspondant à cette variable d'écart.

Par suite :
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{ij}} = -[q_j + \epsilon_j (z_j - c_j)] w_i \Pi_0$$

et comme :
$$w_i \Pi_0 = y_i$$

on a :
$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = -[q_j + \epsilon_j (z_j - c_j)] y_i \delta a_{ij}$$

Variation correspondante des quantités y_k du programme optimum :

On a :
$$\Pi_0 = A^{-1} P_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial a_{ij}} &= -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} A^{-1} P_0 \\ &= -B \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} \Pi_0 \end{aligned}$$

or :
$$B \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = [0 \ 0 \dots B w_j \dots 0]$$

.../...

B_{wj} donne au signe près les composantes du vecteur correspondant à la variable d'écart relative à la coordonnée b_j.

Comme B_{wj} est placé au rang i :

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial a_{ij}} = -\varepsilon_j y_i \begin{vmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{vmatrix}$$

et :

$$\delta \Pi_0 = \frac{\partial \Pi_0}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = -\varepsilon_j \begin{vmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{vmatrix} y_i \delta a_{ij}$$

REMARQUE :

L'interprétation économique de :

$$\delta \varphi = -[q_j + \varepsilon_j (z_j - c_j)] y_i \delta a_{ij}$$

est aisée.

En supposant : $\delta a_{ij} < 0$ $\varepsilon_j = 1$:

Augmentation de marge bénéficiaire = Coût de la variation de consommation de la ressource j sur l'article i + augmentation due à l'utilisation, pour la production d'autres articles, de la quantité de ressources j libérée.

Si la ressource j n'est pas stricte, $z_j - c_j = 0$ et il est bien évident que la quantité de ressource libérée n'a aucune utilisation de "reconversion".

2-4-9 - Signification économique des paramètres de la matrice SIMPLEXE.-

La matrice SIMPLEXE de la solution du maximum est de la forme :

		P ₁	P _i	P _m	P _n	P ₀
c ₁	P ₁	1			y _{1n}	y ₁
				0		
c _i	P _i		1		y _{in}	y _i
		0				
c _m	P _m			1	y _{mn}	y _m
	z _j -c _j	0	...	0	...	0
					z _n -c _n	φ

$c_1 \dots c_i \dots c_m$ sont les marges bénéficiaires unitaires des variables rendant maximum la marge bénéficiaire.

Les y_i (composantes de P_0 dans la base donnée par la structure du maximum) sont les quantités de ces variables.

Les coefficients y_{ik} de P_k ainsi que les variables $z_k - c_k$ ont une signification précise.

1°) - P_k est associé à une variable d'écart :

a - La variable d'écart est précédée du signe +

La composante y_{ik} est le coefficient d'utilisation marginale de la ressource k dans le produit i , et $z_k - c_k$ est la variation marginale de marge bénéficiaire relativement à cette même ressource.

b - La variable d'écart est précédée du signe --

Les variations sont changées de signe.

2°) - P_k est associé à une variable active :

La composante y_{ik} est le coefficient d'équivalence marginale entre le produit i et le produit k , c'est-à-dire que si on désire produire avec les mêmes ressources, une quantité δy_k du produit k , le produit i variera d'une quantité : $\delta y_i = - y_{ik} \delta y_k$

$-(z_k - c_k)$ est la variation marginale de marge bénéficiaire relative au produit k .

2-5 - DISCUSSION ECONOMIQUE.-

2-5-1 - Problème de l'affectation :

La solution du programme linéaire permet de résoudre le problème de l'affectation des moyens de production, en indiquant pour chaque article susceptible d'être produit la quantité de ressources à affecter à chaque article.

Si on adopte la méthode de la consommation moyenne, le problème est résolu au niveau "ressources" (dans une usine de production : au niveau atelier).

Si on adopte la méthode de la consommation différenciée, l'affectation s'effectue au niveau de la classe homogène de ressource (dans le cas d'une usine de production, au niveau machines).

Il est alors possible de calculer les prix de revient dits "techniques" obtenus en incorporant aux coûts proportionnels les amortissements correspondants et éventuellement la part de charges fixes qui peut être ventilée.

Remarquons que cette méthode n'exclut pas que le prix de revient soit dans certains cas extrêmes, supérieur au prix de vente. Ceci ne signifie nullement que l'article en question ~~soit~~ non rentable et qu'il faille abandonner sa fabrication.

La signification est au contraire que la marge bénéficiaire dégagée sur cet article est insuffisante pour couvrir l'amortissement du matériel qu'exige sa production. Il est donc nécessaire de produire même à perte cet article, puisque avec toute autre structure de production, la marge bénéficiaire serait moindre, et par suite, puisque les coûts fixes sont constants, le bénéfice serait moindre.

En réalité, bien entendu, devant un pareil résultat, il conviendra ou bien d'agir sur le prix de vente, ou bien de décider la fabrication d'un autre genre d'article non encore envisagé et de résoudre le nouveau problème d'affectation, consécutif à cette modification de la gamme de production.

Cette méthode n'exclut pas non plus le fait de réaliser un bénéfice supérieur au bénéfice antérieur, en utilisant incomplètement le potentiel de production.

Cette méthode d'affectation des ressources permet aussi de discuter, dans une certaine mesure, le problème de l'amortissement.

En effet, si l'amortissement technique doit être défini d'après les conditions d'usure du matériel, de vétusté ou d'obsolescence, d'autres considérations de conjoncture peuvent intervenir pour définir les amortissements, en particulier la limitation fiscale de la durée d'amortissement.

La considération de la marge bénéficiaire relative à la production de cet article (c_i y_i) pourra être utilement rapprochée de la limite fiscale permise et de l'amortissement technique souhaitable.

2.5.2. - Problème du choix -

La solution du maximum permet aussi de résoudre le problème du choix des articles à produire ou des commandes à prendre.

En effet, les variables ne faisant pas partie de la structure du maximum sont nulles.

Il est utile de remarquer que s'il existe m inégalités relatives aux contraintes, il ne peut y avoir qu'au plus m articles susceptibles d'être produits.

2.5.3. - Problème de modification de la structure de production -

Pour diverses considérations d'ordre pratique ou économique, l'entrepreneur peut désirer ne pas adopter la structure de production la plus rentable. Dans ce cas, il lui est facile de savoir ce que ce nouveau comportement lui coûte, c'est-à-dire quel est le manque à gagner qu'il supportera.

D'après la proposition 5, si on modifie le programme optimum en donnant des valeurs y_k aux variables ne faisant pas partie de la structure du maximum, la marge bénéficiaire varie de $\sum y_k (c_k - z_k)$. Comme dans la solution du maximum, $c_k - z_k$ est négatif ; il s'agit bien d'un manque à gagner.

2.5.4. - Problème de productivité -

La proposition 6 permet d'établir la variation de marge bénéficiaire relative à la variation δa_{ij} de chaque coefficient de consommation a_{ij} .

Il est donc possible dans un problème donné, de hiérarchiser les coefficients de consommation d'après leur rentabilité marginale et d'obtenir ainsi une liste des urgences dans une action de productivité. On pourra aussi chiffrer la rentabilité d'une telle action.

2.5.5. - Problème relatif à la politique de vente -

La proposition 2 a montré que le maximum de la fonction économique ne dépend que des coordonnées strictes de P_0 .

Il est donc inutile de mener une politique d'accroissement de vente sur les articles qui n'ont pas atteint la limite supérieure de la demande.

Par contre, il peut être intéressant d'intensifier l'effort de vente pour un article ayant atteint la limite de la demande fixée. La proposition 3 permet de déterminer la rentabilité marginale d'une politique de vente et par suite, de classer les articles dans un ordre préférentiel.

REMARQUE.-

Il peut paraître choquant d'adopter une structure de production qui n'utilise pas ou peu, pour certains articles, les possibilités de vente définies par la limite supérieure de la demande.

Il est alors nécessaire d'envisager la demande sous son aspect dynamique et non sous son aspect statique. Si les articles peu produits ou éliminés de la structure de production sont des articles dont la demande est en régression, il convient de ne rien modifier à la politique de production.

Si par contre la demande est en expansion, il conviendra, quitte à ne pas adopter la structure de production la plus rentable, de tenir compte de ce fait et de modifier la structure de production. Mieux, il sera préférable de mener une politique de productivité pour faire entrer cet article dans la structure de production.

Cette politique pourra être basée, soit sur une diminution des coefficients de consommation, soit sur l'augmentation de la marge bénéficiaire par pression sur les prix d'achat, ou augmentation des prix de vente.

2.5.6. - Problème relatif à la politique d'achat :

Le maximum de la fonction économique est fonction linéaire des marges bénéficiaires unitaires, elle-même fonction linéaire des prix d'achat (supposé invariable avec les quantités).

Il est donc facile de déterminer la rentabilité marginale liée à chaque bien ou service acheté au marché fournisseur, et de baser une politique d'achat sur une telle étude.

2.5.7. - Problème d'investissement :

Le maximum de la fonction économique est fonction des coordonnées strictes de P_0 . Par suite, il est inutile de mener une politique d'investissement pour les ressources non strictes.

Par contre, dans le cas des ressources strictes, on peut calculer par l'intermédiaire des $z_k - c_k$ la rentabilité marginale des investissements.

Ce problème fera l'objet d'une étude plus approfondie dans la deuxième partie de cet exposé.

REMARQUE.-

Il importe de noter que les rentabilités marginales dont nous avons parlé précédemment n'ont de sens que si les conditions du maximum sont toujours respectées, à savoir : coordonnées de P_0 et Δ de $z_k - c_k$ pour tout k , non négatives.
valeurs

C'est donc dans un domaine bien déterminé de prix et de quantité que ces notions ont un sens.

2.5.8. - Le développement ultérieur va préciser cette question et nous permettra d'étudier les autres types de fonctions envisagées antérieurement (variation des marges bénéficiaires avec les quantités).

Néanmoins, dans le cadre limité de ce qui a été dit jusqu'à présent, il apparaît que la programmation linéaire s'avère un outil particulièrement efficace, dans le domaine de la gestion industrielle. Elle permet de discuter l'influence de tous les paramètres conditionnant le fonctionnement de l'entreprise, de suivre les liaisons et interactions intéressantes et de dégager la stratégie économique optimale.

3 - DEUXIEME PARTIE - PLAN D'INVESTISSEMENT - RECHERCHE de la VOIE d'EXPANSION.-

3.1 - GENERALITES.-

Un problème d'investissement se pose à toute industrie qui a atteint la saturation de certains moyens de production et qui se trouve devant un marché client non saturé.

Le problème est alors, compte tenu de l'état dans lequel se trouve l'entreprise, de "lever" les goulots d'étranglement de la manière la plus rentable. En d'autres termes, le problème consiste à obtenir l'accroissement maximum de marge bénéficiaire pour une dépense d'investissement donnée.

Le processus à utiliser est évident quand il n'y a qu'un seul goulot d'étranglement ; il est par contre plus délicat de définir la méthode appropriée dans le cas de plusieurs goulots.

Nous supposerons en premier lieu que l'accroissement des ressources peut avoir lieu de manière continue et que l'on peut déterminer un coût d'investissement relatif à l'unité de ressource indépendamment des quantités investies.

Nous verrons ensuite quelle méthode appliquer dans le cas de ressource discontinue.

Remarquons que l'accroissement de ressource peut être considéré comme continu quand la quantité de ressource apportée par une nouvelle unité de production est petite par rapport à la quantité de ressource déjà existante. C'est pratiquement le cas de toute industrie de quelque importance (voir remarque).

3.2. - FORMULATION MATHEMATIQUE.-

Si on appelle b_{j0} la limite supérieure initiale des contraintes subies par l'entreprise et K_j le coût d'investissement d'une unité de ressource j supplémentaire, le problème se posera sous la forme suivante :

Rendre maximum la marge bénéficiaire

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

compte tenu des "contraintes"

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \leq b_j \quad j \in (1 \dots m)$$

et de la limitation de la somme à investir

$$\sum K_j (b_j - b_{j0}) \leq P \quad b_j \geq b_{j0} \quad \dots \dots$$

REMARQUE : Par exemple, s'il existe une section de 10 machines-outils qui constitue un goulot d'étranglement, et qu'il convienne d'acheter une nouvelle machine l'accroissement des ressources sera regardé comme continu. Si le prix d'achat A apporte T minutes supplémentaires utilisables pour la production, le coût de la minute de production sera : $\frac{A}{T}$

Il est évident que $K_j = 0$ dans le cas de goulots d'étranglement qui ne peuvent être "levés" par investissement (limites de marché par exemple).

Si on considère les m ressources b_{j0} comme les coordonnées d'un élément P_0 de l'espace vectoriel B_m , à tout élément P , de coordonnée b_j dans B_m , on peut faire correspondre, par résolution d'un programme linéaire, la structure du maximum et la valeur correspondante de la fonction économique.

A l'élément P_0 correspond :

- la structure du maximum $P_1 \dots P_m$
- les composantes de P_0 données par la matrice Π_0 telle que

$$\Pi_0 = A^{-1} P_0$$
- le maximum de la fonction économique $\varphi = \sum_i \mu_i b_{i0}$

en appelant μ_i les valeurs $z_j - c_j$ correspondant aux variables d'écart relatives aux coordonnées b_{j0} .

Si aux données numériques b_{j0} , on substitue les variables b_j , la structure du maximum correspondant à l'élément variable P de B_m sera encore $P_1 \dots P_m$, tant que les relations :

$$\sum_i \varepsilon_i \mu_i b_i \geq 0 \quad (i \text{ variant de } 1 \text{ à } m).$$

seront vérifiées.

On a vu en effet (proposition 1) que les conditions $z_k - c_k \geq 0$ sont indépendantes de P .

Le maximum de la fonction économique correspondant sera :

$$\varphi = \sum_i \varepsilon_i \mu_i b_i$$

Par suite, la structure $P_1 \dots P_m$ restera structure du maximum, tant que P appartiendra à un sous-espace M de B_m , défini par $\Pi = A^{-1} P \geq 0$

La condition de limitation des investissements

$$\sum \kappa_i (b_i - b_{i0}) \leq D$$

avec $b_j \geq b_{j0}$ (les ressources ne peuvent décroître), définit un sous-espace B_D dans B_m .

Les éléments de B satisfaisant aux équations définissant M et à l'équation de limitation des ressources, appartiennent à M et à B_D donc à leur intersection.

La fonction économique atteint son maximum en un point de ce sous-ensemble. La recherche de la voie d'expansion sera la recherche de la trajectoire de ce point dans B_m , quand D varie.

3.2.1. - Recherche de la voie d'expansion à l'aide des coefficients marginaux.-

On a vu, d'après la proposition 4, que si on fait varier de Δb_j la jème coordonnée stricte b_j de P_0 dans la base initiale, les coordonnées y_k de P_0 dans la base du maximum varient de $\varepsilon_j y_{kj} \Delta b_j$ et la marge bénéficiaire varie de $\varepsilon_j (z_j - c_j) \Delta b_j = \varepsilon_j \mu_j \Delta b_j$

Le coût d'investissement de Δb_j est $K_j \Delta b_j$ et la rentabilité marginale relative à b_j est : $\varepsilon_j \mu_j$. Evidemment ici $\varepsilon_j = 1$ (goulot d'étranglement atteint).

Il conviendra donc d'investir dans la ressource présentant la rentabilité maximum..

Corrélativement, les composantes de P_0 varient de $y_{kj} \Delta b_j$ et deviennent $y_k + y_{kj} \Delta b_j$

Si tous les y_{kj} sont positifs, l'expansion pourra se produire indéfiniment par l'investissement dans cette ressource stricte.

Par contre, si certains y_{kj} sont négatifs, une composante de P_0 dans la base du maximum s'annulera pour :

$$\Delta b_j = \inf_{k \in K_j} \left(- \frac{y_k}{y_{kj}} \right)$$

(Le symbole y_{kj} signifiant que y_{kj} est négatif).

Il y a alors dégénérescence. Le vecteur P s'exprimant en fonction d'un nombre de vecteurs P_i inférieur à m .

Remarque :

Plus généralement pour une variation Δb_j de la jème composante de P_0 dans la base initiale, la composante de P_0 dans la base du maximum devient :

$$y_k + \varepsilon_j y_{kj} \Delta b_j$$

Pour que cette quantité soit non négative il faut que :

$$|\Delta b_j| \leq \inf_{k \in K_j} \left| \frac{y_k}{\varepsilon_j y_{kj}} \right|$$

$$K_j = \text{ensemble des } k \text{ tels que } \varepsilon_j y_{kj} \Delta b_j < 0$$

3.2.2. - Etude des cas de dégénérescence.-

Il y a dégénérescence d'ordre k si dans une structure de maximum d'ordre m , le vecteur P s'exprime en fonction de $m - k$ vecteurs P_i . Donc P appartient à k hyperplans de la forme $\sum \varepsilon_j y_{ji} b_j = 0$, appartenant à la frontière du sous-ensemble M

Dans ce cas, il peut exister plusieurs structures de maximum possible. Ces structures seront dites structures connexes.

A chacune de ces structures correspond un sous-ensemble M_i et une détermination du maximum de la fonction économique valable dans ce sous-ensemble et sur sa frontière.

Pour une valeur donnée de D , il existe dans chaque structure une borne supérieure du maximum de la fonction économique (qui est alors une fonction multiforme), et la structure à choisir pour continuer l'expansion sera la structure connexe présentant pour D donnée le maximum de φ .

3.2.3. - Etude mathématique des structures connexes :

Si, partant d'une structure non dégénérée, on a par augmentation de b_j atteint un cas de dégénérescence par annulation de la composante y_r de P, il y a dans la ligne Pr du tableau SIMPLEXE un y_{ri} négatif, à savoir : y_{rj} .

Si on remplace dans la structure du maximum, Pr par un vecteur Pk les coefficients $\mu_i = z_i - c_i$, deviennent :

$$\mu'_i = \mu_i - \mu_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$$

avec $\mu_i \geq 0$ pour tout i, car on est en présence d'une structure d'un maximum.

On sera en présence d'une nouvelle structure d'un maximum si

$$\mu'_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i$$

c'est-à-dire si

$$\mu_i - \mu_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}} \geq 0 \quad \text{pour tout } i$$

2 cas à envisager :

1°) - y_{rk} positif :

Comme $\mu_i \geq 0$, pour tout $y_{ri} < 0$, $\mu_i - \mu_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$ est non négatif.

Pour $y_{ri} > 0$, $\mu_i - \mu_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$ sera positif si :

$$\frac{\mu_i}{y_{ri}} \geq \frac{\mu_k}{y_{rk}} \quad \text{pour tout } i$$

Or, il y a dans la ligne r une valeur $y_{rk} = 1$, c'est y_{rr} , et puisque P_r fait partie de la structure $\mu_r = 0$ on est conduit à la structure identique.

2°) - y_{rk} négatif :

Pour tout i tel que $y_{ri} \geq 0$, μ'_i est non négatif

Pour tout i, tel que $y_{ri} \leq 0$, μ'_i sera positif, si

$$\frac{\mu_k}{y_{rk}} \leq \frac{\mu_i}{y_{ri}}$$

Cette relation aura lieu pour tout i, tel que $y_{ri} < 0$ si on choisit k tel que :

$$\frac{\mu_k}{y_{rk}} = \sup \left(\frac{\mu_i}{y_{ri}} \right)$$

REMARQUE.-

On sait, puisque y_r s'est annulé, qu'il y a au moins un y_{ri} négatif; il y a donc au moins une structure connexe.

Pour tout k tel que $\mu_k = 0$, Pk n'appartenant pas à la structure du maximum, on obtient une nouvelle structure de maximum en substituant Pk à Pr.

D'où PROPOSITION 7 :

A partir d'une structure de maximum dégénérée, on obtiendra une structure connexe, si on substitue au vecteur P_r , tel que $y_r = 0$, le vecteur P_k , tel que : $\frac{p_k}{y_{rk}} = \sup_i \left(\frac{p_i}{y_{ri}} \right)$ ou tel que : $p_k = 0$

3 - 2 - 4 - Caractère de réciprocité :

Dans la ligne correspondant à P_k substitué à P_r du tableau SIMPLEXE, les transformés sont :

$$y'_{ki} = \frac{y_{ri}}{y_{rk}} \quad \text{et} \quad y'_k = \frac{y_r}{y_{rk}}$$

Une nouvelle structure connexe peut être recherchée.

D'après la proposition 7, le vecteur P_j qui est susceptible de remplacer P_k est tel que

$$y'_{ki} = \frac{y_{ri}}{y_{rk}} \quad \text{est négatif.}$$

Les y'_{kj} négatifs proviennent donc des y_{rj} positifs (y_{rj}^+)

Par ailleurs les valeurs p'_j dans la structure connexe sont égales à :

$$p'_j = p_i - p_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

$$\text{et} \quad \sup_i \left(\frac{p'_i}{y'_{ki}} \right) = \sup_i \frac{p_i - p_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}}{\frac{y_{ri}}{y_{rk}}} = \sup_i \left(p_i \frac{y_{rk}}{y_{ri}^+} - p_k \right)$$

le terme $p_i \frac{y_{rk}}{y_{ri}^+}$ étant négatif :

$$\sup_i \left(p_i \frac{y_{rk}}{y_{ri}^+} - p_k \right) = -p_k \quad \text{si} \quad p_i = 0$$

C'est en particulier le cas pour $j = r$, car P_r faisant partie de la structure du maximum $p_r = 0$

D'où PROPOSITION 8 -

Il y a donc réciprocité entre structures connexes.

Remarque :

Dans le cas de dégénérescence d'ordre k , il y a k composantes y_i de P qui sont nulles. On peut donc appliquer à chaque ligne dégénérée le même raisonnement et il y aura en général 2^k structures connexes (il est possible qu'il y ait un nombre de structures dégénérées supérieur à 2^k si certains p_k sont nuls, sans que le P_k correspondant appartienne à la structure du maximum et un nombre inférieur à 2^k si un même vecteur P_k peut être substitué à plusieurs P_r .)

3.2.5. - Relation entre les composantes de P dans les cas de dégénérescence.-

Le maximum de la fonction économique ne varie pas en passant dans la structure connexe si $\Delta b_j = 0$ pour tout j .

donc : $\varphi = \sum_i p_i b_i = \sum_i p'_i b_i$, p'_i correspondant à la variable d'écart de l'équation j . $\epsilon_j = 1$.

or : $p'_i = p_i - p_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$

donc : $\varphi = \sum_i (p_i - p_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}) b_i = \sum_i p_i b_i - \frac{p_k}{y_{rk}} \sum y_{ri} b_i$

d'où : $\sum y_{ri} b_i = 0$

De plus, dans le changement de structure :

$$y'_{ri} = y_{ri} - y_{rk} \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$$

donc :

$$\sum_i y'_{ri} b_i = \sum_i y_{ri} b_i - \frac{y_{rk}}{y_{rk}} \sum y_{ri} b_i$$

comme : $\sum_i y_{ri} b_i = 0$

$$\sum_i y'_{ri} b_i = \sum_i y_{ri} b_i = 0$$

D'où PROPOSITION 9 -

Dans une ligne du tableau SIMPLEXE, telle que $y_r = 0$, $\sum_i y_{ri} b_i = 0$, y_{ri} étant la composante du vecteur P_j correspondant à la variable d'écart de la ressource b_j , sur le vecteur P_r , et de plus $\sum_i y_{ri} b_i = \text{constante}$ dans n'importe quelle ligne i .

.../...

3.2.6. - Variation des coefficients de la fonction économique :

Nous abordons ici un problème analogue à celui de la variation des ressources et qui sera utilisé par la suite. (on suppose ici que les ε_j correspondant aux variables d'écart sont positifs).

a - Pi correspondant à Ci appartient à la structure du maximum -

Si on fait varier le coefficient c_i de la fonction économique, la structure du maximum restera valable tant que $\rho_i = z_j - c_j$ sera non négatif (rappelons que d'après la proposition : les valeurs y_j ne sont pas affectées par les variations des coefficients de la fonction économique).

Supposons que l'on fasse varier continuellement le coefficient c_i d'une quantité Δc_i ; la variation correspondante de ρ_i sera $\Delta \rho_i = y_{ri} \Delta c_i$ d'après la définition même des : $\rho_i = z_i - c_i = \sum c_j y_{ji} - c_i$

et on aura : $\rho_i = \dot{\rho}_i + y_{ri} \Delta c_i$ ($\dot{\rho}_i$ valeur initiale de ρ_i).

En supposant $\Delta c_i > 0$ (le raisonnement est analogue pour $\Delta c_i < 0$) soit k tel que $\frac{\dot{\rho}_k}{y_{ki}} = \inf_j \left(\frac{\dot{\rho}_j}{y_{ji}} \right)$. Si $\Delta c_i = -\frac{\dot{\rho}_k}{y_{ki}}$, ρ_k s'annule, les autres ρ_j restent positifs.

Pour $\Delta c_i > \Delta \dot{c}_i = -\frac{\dot{\rho}_k}{y_{ki}}$, ρ_k devient négatif et la structure initiale n'est plus structure de maximum.

Si on a choisi $\Delta c_i > \Delta \dot{c}_i$ assez petit pour que seul ρ_k soit négatif, en substituant P_k au vecteur P_r de la structure initiale, tel que :

$$\frac{y_r}{y_{rk}} = \inf_j \left(\frac{y_j}{y_{jk}} \right) \quad \text{on aura la nouvelle structure de maximum.}$$

En effet, d'après le choix de P_r , les nouvelles composantes y'_{ij} de P seront positives et les nouveaux $\rho'_i = \rho_i - \rho_k \frac{y_{ri}}{y_{rk}}$ resteront positifs pour $\Delta c_i - \Delta \dot{c}_i$ assez petit.

Si c_i continue à augmenter, on est ramené au problème initial.

Remarquons que pour $\Delta c_i = \Delta \dot{c}_i = -\frac{\dot{\rho}_k}{y_{ki}}$, la variation de la fonction économique est : $\Delta \varphi = -\frac{\dot{\rho}_k}{y_{ki}} y_i$

b - Pi correspondant à ci ne fait pas partie de la structure du maximum -

La structure reste valable pour $\Delta c_i \leq \rho_i$, pour $\Delta c_i > \rho_i$ on passera continuellement de o à Δc_i en remplaçant par P_i dans la structure du maximum le vecteur P_r tel que :

$$\frac{y_r}{y_{ri}} = \inf_j \left(\frac{y_j}{y_{ji}} \right)$$

D'où PROPOSITION 10 -

(énoncée pour $\varepsilon_i = \pm 1$).

Si dans un programme optimum on augmente de Δc_i le coefficient c_i de la fonction économique :

a - P_i correspondant à c_i fait partie de la structure du maximum

La structure initiale reste valable pour $|\Delta c_i| \leq \inf_{j \in J_i} \left| \frac{p_j}{y_{ji}} \right| = \left| \frac{p_k}{y_{ki}} \right|$

J_i ensemble des j tels que $y_{ji} \Delta c_i < 0$

Pour Δc_i supérieur à cette limite on passera continuellement de 0 à Δc_i en remplaçant par le vecteur P^k , le vecteur P^r de la structure du maximum.

tel que : $\frac{y_r}{y_{rk}} = \inf_{j \in J_k} \left(\frac{y_j}{y_{jk}} \right)$

J_k^+ ensemble des j tels que y_{jk} soit positif.

b - P_i correspondant à c_i ne fait pas partie de la structure du maximum -

La structure initiale reste valable pour $\Delta c_i \leq p_c$, pour $\Delta c_i > p_c$ on passera continuellement de 0 à Δc_i en remplaçant par P_i dans la structure du maximum le vecteur P^r tel que :

$$\frac{y_r}{y_{ri}} = \inf_j \left(\frac{y_j}{y_{ji}} \right)$$

3.3 - NOUVELLE FORMULATION du PROBLEME d'EXPANSION.

3.3.1. - Nous avons vu que dès que l'on arrive à un cas de dégénérescence, il convient de chercher le maximum de la fonction économique dans les structures connexes.

Or, au cours de l'expansion, l'ordre de dégénérescence croît et la recherche du maximum "par tâtonnement" dans les structures connexes devient vite fastidieuse.

Nous sommes donc amenés à formuler le problème d'une autre manière.

Le problème initial traité dans la première partie était :

Rendre maximum

$$\varphi = \sum_i c_i y_{i0} \quad y_{i0} \geq 0$$

compte tenu de :

$$\sum_i a_{ij} y_{i0} + n_{j0} = b_{j0} \quad \begin{array}{l} m \text{ équations} \\ n_{j0} = \text{variable d'écart} \end{array}$$

Le problème actuel est :

Rendre maximum

$$\varphi = \sum_i c_i y_i \quad (1)$$

compte tenu de :

$$\sum_i a_{ij} y_i + n_j = b_j \quad (2) \quad y_i \geq 0 \quad j \in (1 \dots m)$$

$$\sum_j \kappa_j (b_j - b_{j0}) \leq D \quad (3)$$

$$b_j \geq b_{j0} \quad (4)$$

On peut écrire l'équation (3) sous la forme

$$\sum_j \kappa_j b_j \leq D + \sum_j \kappa_j b_{j0} \quad (5)$$

et en utilisant la valeur des b_j donnée par l'équation (2), la relation précédente devient :

$$\sum_j \kappa_j (\sum_i a_{ij} y_i + n_j) \leq D + \sum_j \kappa_j b_{j0}$$

de même l'équation (4) devient en introduisant les valeurs de b_{j0} :

$$\sum_i a_{ij} y_i + n_j \geq b_{j0}$$

Sous sa nouvelle forme le problème devient donc :

Rendre maximum

$$\varphi = \sum_i c_i y_i$$

Compte tenu de :

$$\sum_i a_{ij} y_i + n_i \geq b_{j0} \quad (6)$$

$$\sum_j \kappa_j (a_{ij} y_i + n_i) \leq D + \sum_j \kappa_j b_{j0} \quad (7)$$

Réciproquement :

Montrons que le nouveau problème est bien équivalent au problème initial.

Posons :

$$\sum_i a_{ij} y_i + n_i = b_j$$

Les équations (6) et (7) s'écrivent :

$$b_j \geq b_{j0}$$

$$\sum_i \kappa_i (b_j - b_{j0}) \leq 0$$

Ce sont bien les conditions du problème initial.

3.3.2. - Le problème ramené à un cas classique :

On voit par la forme des équations (6) et (7) que le problème est un problème classique de programmation linéaire.

Il suffira d'introduire les variables d'écart pour transformer les inéquations en équations.

Néanmoins, dans les équations (6) les variables d'écart sont précédées du signe -.

Remarquons que les n_i ne sont plus des variables d'écart comme dans le problème initial, mais des inconnues au même titre que les y_i et les P_i correspondants, ne peuvent par suite constituer une base valable pour l'étude.

3.3.3. - Simplification du problème si le problème initial a été résolu.-

Nous allons considérer ici une simplification particulièrement riche en conséquences.

.../...

- Problème initial :

Rendre maximum φ , compte tenu de :

$$\sum_i a_{ij} y_{i0} + n_{j0} = b_{j0} \quad (m \text{ équations})$$

- Problème actuel :

Rendre φ maximum, compte tenu de :

$$\sum_i a_{ij} y_i + n_i - \theta_i = b_{j0} \quad (m \text{ équations})$$

$$\sum_i K_i (a_{ij} y_i + n_i) + \theta_{m+1} = D + \sum_i K_i b_{j0} \quad \begin{matrix} \theta_i \\ \theta_{m+1} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \text{variables} \\ \text{d'écart} \end{matrix} \right.$$

Si dans le problème actuel, on écrit la matrice Simplexe en prenant pour vecteurs de base les vecteurs n_i (1 à m) et θ_{m+1} , les m premières lignes de cette matrice sont identiques à celles de la matrice Simplexe du problème initial, à cette différence près que les vecteurs correspondant aux θ_i n'existaient pas initialement. Leurs composantes sont celles des n_i changées de signe.

Soit B la matrice $m+1, m+1$, formée par les composantes des m vecteurs P_i de la base du maximum dans le problème initial et du vecteur correspondant à θ_{m+1} , dans la base définie précédemment, on peut écrire :

$$B = \begin{vmatrix} A & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

avec A = matrice $m \times m$, déjà rencontrée dans le problème initial
 b = matrice $m \times 1$; composantes du vecteur P_{m+1} correspondant à θ_{m+1}
 c = matrice $1 \times m$, composante des P_i sur le vecteur P_{m+1}
 d = matrice 1×1 .

3.3.3.1. - Inversion de la matrice B -

Etudions le problème général d'inversion d'une matrice B, composée de 4 sous-matrices: A, b, c, d.

La matrice B^{-1} peut être réduite à 4 sous-matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{mm} & \beta_{m1} \\ \gamma_{1m} & \delta_{11} \end{vmatrix}$$

Cherchons si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ peuvent s'exprimer en fonction de A, b, c, d.
 Puisque $BB^{-1} = I$:

$$\begin{vmatrix} A_{mm} & b_{m1} \\ c_{1m} & d_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{mm} & \beta_{m1} \\ \gamma_{1m} & \delta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{mm} & 0_{m1} \\ 0_{1m} & 1_{11} \end{vmatrix}$$

.../...

En développant :

$$A_{mm} \alpha_{mm} + b_{m1} \gamma_{1m} = I_{mm} \quad (1)$$

$$A_{mm} \beta_{m1} + b_{m1} \delta_{11} = 0_{m1} \quad (2)$$

$$C_{1m} \alpha_{mm} + d_{11} \gamma_{1m} = 0_{1m} \quad (3)$$

$$C_{1m} \beta_{m1} + d_{11} \delta_{11} = 1_{11} \quad (4)$$

Si on suppose A et α régulières, on a, d'après l'équation

$$\beta_{m1} = -A_{mm}^{-1} b_{m1} \delta_{11}$$

en reportant dans l'équation (4), il vient :

$$(-C_{1m} A_{mm}^{-1} b_{m1} + d_{11}) \delta_{11} = 1$$

d'où :

$$\delta_{11} = \frac{1}{d_{11} - C_{1m} A_{mm}^{-1} b_{m1}}$$

et par suite :

$$\beta_{m1} = \frac{-A_{mm}^{-1} b_{m1}}{d_{11} - C_{1m} A_{mm}^{-1} b_{m1}}$$

En éliminant α_{mm} dans les équations (1) et (3), on a :

$$\gamma_{1m} = \frac{-C_{1m} A_{mm}^{-1}}{d_{11} - C_{1m} A_{mm}^{-1} b_{m1}}$$

et ensuite :

$$\alpha_{mm} = A_{mm}^{-1} \frac{A_{mm}^{-1} b_{m1} C_{1m} A_{mm}^{-1}}{d_{11} - C_{1m} A_{mm}^{-1} b_{m1}}$$

et par suite PROPOSITION 11 :

La matrice B_{mm}^{-1} peut s'exprimer en fonction des 4 sous-matrices :

A_{mm} , b_{m1} , C_{1m} , d_{11} , de B_{mm} .

3.3.3.2.- Retour au problème -

La matrice B du problème est telle que :

$$\begin{aligned} A_{mm} &= |a_{ij}| \\ b_{m1} &= |0| \quad - \text{composantes de } \theta_{m1} \text{ sur les } \eta_i \\ d_{11} &= |1| \end{aligned}$$

Par suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{m+1} = 1 \\ b_{m+1} = 101 \\ y_{m+1} = -c_{m+1} A^{-1} u_m \\ \alpha_{m+1} = A^{-1} u_m \end{array} \right.$$

Soit P_i la matrice formée par les composantes de P_i dans la base initiale des e_j et λ_i la composante de P_i suivant e_{m+1} , les $m+1$ composantes de P_i deviennent dans la base du maximum du problème initial, augmentés du vecteur e_{m+1} , correspondant à θ_{m+1} :

$$\left| \begin{array}{cc} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} P_i \\ \lambda_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A^{-1} P_i \\ \lambda_i - CA^{-1} P_i \end{array} \right|$$

D'après l'équation $\sum_i \kappa_i (a_{ij} y_j + v_j) + \theta_{m+1} = 0 + \sum_i \kappa_i b_i$

soit K la matrice $1 \times m$ de composantes $k_1 \dots k_m$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_j \kappa_j a_{ij} = \kappa P_i \text{ pour les variables } x_i \text{ ou } v_i \\ \lambda_i &= 0 \text{ pour les variables } \theta_i \\ \lambda_{m+1} &= 1 \text{ pour } \theta_{m+1} \end{aligned}$$

$$\lambda_i = 0 + \sum \kappa_j b_j \text{ pour la composante de } P \text{ sur } e_{m+1} = D + \kappa P$$

Par suite la matrice C s'écrit :

$$C = K (P_1 \dots P_m) = K A$$

et pour les variables x_i ou v_i : $\lambda_i - CA^{-1} P_i = \kappa P_i - \kappa A A^{-1} P_i = 0$

pour les variables θ_i : $\lambda_i - CA^{-1} P_i = 0 - \kappa P_i = \kappa_i$

car P_i est un vecteur colonne de composantes $-f_{ij}$ (symboles de KRONECKER).

$$\text{pour } \theta_{m+1} \quad \lambda_i - CA^{-1} P_i = 1$$

pour la composante de P sur e_{m+1} : $\lambda - CA^{-1} P = D + \kappa P - \kappa A A^{-1} P = D$

d'où PROPOSITION 12.-

Si on a déjà établi la matrice SIMPLEXE du programme initial correspondant à la structure du maximum, il suffit, pour traiter le problème de l'expansion, d'ajouter à cette matrice la ligne correspondant au vecteur e_{m+1} de θ_{m+1} et des colonnes correspondant aux vecteurs θ_i opposées de celles des e_j .

Sur cette ligne, les $y_{m+1,i}$ sont tous nuls, sauf ceux correspondant aux θ_j , qui sont égaux à K_j . La composante de P suivant e_{m+1} est D .

.../...

3.3.3.3. - Nouvelle base du maximum.-

Il a déjà été remarqué que les composantes sur les m vecteurs de la structure du maximum initiale des vecteurs correspondant aux θ_j étaient opposées aux composantes des vecteurs correspondant aux η_j . Par ailleurs, comme le coefficient de θ_{m+1} dans la fonction économique est nul, les $z_j - c_j$ correspondant aux θ_j seront ceux des η_j changé de signe.

Comme initialement la structure était celle du maximum, $z_k - c_k \geq 0$ pour tout k , correspondant aux inconnues initiales, en particulier pour les η_j donc $z_j - c_j \leq 0$ pour θ_j et la structure initiale majorée de P_{m+1} n'est pas structure de maximum.

Si on substitue le vecteur P_k dans cette structure, correspondant à θ_k au vecteur e_{m+1} correspondant à θ_{m+1} , on a :

$$p'_i = p_i - \frac{y_{m+1,i}}{y_{m+1,k}} p_k$$

Comme $y_{m+1,i} = 0$ pour les inconnues qui ne sont pas des θ_j

$$p'_i = p_i$$

Pour les θ_j , p_j est négatif et $y_{m+1,j} = K_j$ positif

Donc :

$$p'_i = p_i - \frac{K_i}{K_k} p_k$$

sera positif si

$$\frac{p_k}{K_k} = \inf_j \frac{p_j}{K_j} = -\sup_j \left| \frac{p_j}{K_j} \right| \quad \text{car } p_i \leq 0$$

La structure sera celle du maximum si P_k est choisi de cette manière.

On retrouve donc la règle précédemment donnée : investir dans la ressource conduisant à la rentabilité marginale la plus élevée.

REMARQUE.-

1°) - Dans ce changement de base, les y_i deviennent :

$$y'_i = y_i - y_k \frac{D_i}{K_k}$$

Si tout $y_i \neq 0$, On pourra choisir D assez petit pour que les y'_i soient positifs pour tout i . On sera bien dans le cas d'une structure de maximum.

2°) - Ceci n'a pas lieu dans le cas où un y_i est nul (soit $y_r = 0$) et le y_{rk} correspondant positif. Comme il y a au moins un y_{rj} négatif (celui correspondant à η_k qui, nous le savons, est de signe contraire à celui de θ_k) il est facile d'après la proposition 7 de passer à une structure dégénérée connexe où ce cas ne se produira pas.

3°) $-\frac{y_{ik}}{K_k}$ est la variation marginale de y_i en fonction de D .

Comme la variable d'écart θ_{m+1} était précédée du signe +, il en résulte (voir proposition 5), que la composante de θ_{m+1} sur P_i appartenant à la base est $y_{i,m+1} = -\frac{y_{ik}}{K_k}$

3.4 - CHEMIN D'EXPANSION - PLAN d'INVESTISSEMENT.-

En général, dans la nouvelle base du maximum, les composantes y_i de P seront non nulles et on peut faire croître D. Les y_i sont fonctions linéaires de D.

$$y_i' = y_i - \frac{y_{ik}}{k_k} D$$

Si $y_{ik} > 0$, y_i diminue quand D croît, et la structure du maximum n'est valable que pour

$$D \leq \inf \frac{y_i k_k}{y_{ik}}$$

Pour cette valeur de D, un y_i , soit y_r , est nul. C'est un cas de dégénérescence.

Or, il existe au moins un coefficient y_{rk} négatif, par exemple y_r , $m + 1$, d'après la remarque 3 du paragraphe 3.3.3.3.

Par suite, on peut trouver une structure connexe où le coefficient de D dans le transformé de y_r sera positif. ($y''_r = \frac{y'_r}{y_{rk}'}$, y_{rk}' étant négatif).

On continuera donc à augmenter D jusqu'à ce qu'une ^{nouvelle} composante de P s'annule.

On cherchera la nouvelle structure connexe et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'expansion soit terminée (limite de la demande atteinte pour toutes les variables actives indépendantes).

Dans toute cette expansion, les composantes de P sont des fonctions linéaires de D. Ces fonctions changent de forme à chaque changement de structure.

Les augmentations de ressources sont données par les θ_i , car $b_i = b_{i0} + \theta_i$ et permettent de définir le plan d'investissement présentant la rentabilité maximum. Géométriquement, la voie d'expansion dans l'espace B_m est définie paramétriquement en fonction de D.

REMARQUE.-

1°) - Il importe de remarquer que la rentabilité marginale de la dépense D est décroissante, ceci résulte du fait que "les goulots d'étranglement" deviennent de plus en plus nombreux et par suite une somme donnée se répartit sur un plus grand nombre de ressources.

2°) - Quand, dans l'expansion, un y_i s'annule, il existe toujours au moins un y_{ik} négatif pour passer à la structure connexe (par exemple y_i , $m + 1$).

3.5 - SIGNIFICATION ECONOMIQUE de la NOUVELLE MATRICE SIMPLEXE.-

3.5.1.

3.5.1.1. - Les inconnues correspondant aux vecteurs de structure (composantes de P) sont soit des variables actives, soit des variables d'écart n_j et θ_j

Les n_j représentent la quantité de ressource j non utilisée.

Les θ_j mesurent l'augmentation de la ressource j.

3.5.1.2. - Les vecteurs P_k de composantes y_{ik} sont de 3 sortes.

a) - P_k correspond à une variable active :

D'après la proposition 5, les y_{ik} correspondant à une variable active représentent la variation marginale changée de signe des quantités y_i relatives à une variation unitaire de la variable y_k . Si y_i est une variable active, les y_{ik} sont des coefficients d'équivalence.

La valeur de $z_k - c_k$ correspondante représente la perte marginale de marge bénéficiaire.

b) - P_k correspond à une variable d'écart n_j

Les y_{ik} représentent la variation marginale des y_i pour une variation unitaire des ressources b_k ; les valeurs de $z_k - c_k$ représentent l'augmentation marginale de marge bénéficiaire.

c) - P_k correspond à une variable d'écart θ_j

Les y_{ik} représentent la variation marginale changée de signe des quantités y_i , relativement à une variation unitaire de θ_j

Les $z_k - c_k$ correspondant représente la perte de marge bénéficiaire.

d) - P_k correspond à θ_{m+1} :

Les $y_i, m+1$ représentent la variation marginale des y_i dus à une variation de dépense d'investissement unitaire. Ce sont, par suite, les coefficients de D dans l'expression des y_i , en fonction de D.

Le $z_k - c_k$ correspondant représente la rentabilité marginale d'investissement.

REMARQUE :

Tous les éléments marginaux précédents s'entendent évidemment toutes choses égales par ailleurs.

.../...

3.5.2. - Diverses relations remarquables :

1°) - Une variation δD correspond à une variation $y_{i,m+1} \delta D$ de la ressource j (variable θ_i de coût d'investissement K_j).

Par suite : $\delta D = \sum_i y_{i,m+1} K_i \delta D$

soit : $\sum_i y_{i,m+1} K_i = 1$ (la somme étant étendue aux variables d'écart θ_i)

2°) - La variation de marge bénéficiaire est : $\sum_{m+1} \delta D$ car $c_{m+1} = 0$

Elle est égale à la somme des variations de marge bénéficiaire dues aux diverses augmentations de ressources :

$$\sum_k (z_k - c_k) y_{k,m+1} \delta D \quad \text{la somme étant étendue aux variables d'écart } n_k \text{ des ressources } b_k$$

et comme les c_k correspondants sont nuls :

$$z_{m+1} = \sum_k y_{k,m+1} z_k$$

3°) - Une variation $\delta \theta_i$ entraîne une variation $-y_{ki} \delta \theta_i$ de θ_k appartenant à la structure.

Nous noterons cette variation : $\delta \theta_k = -y_{ki} \delta \theta_i$

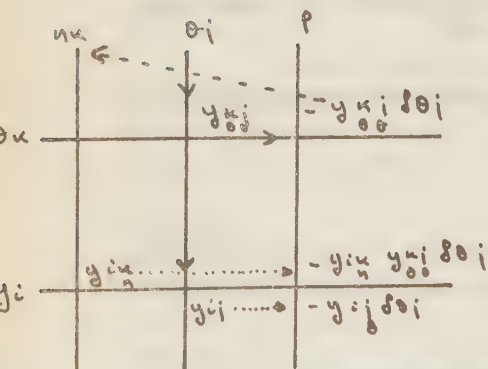
Or, en général, si θ_k appartient à la structure n_k n'y figure pas (en effet une ressource stricte correspond à $n_k = 0$, et comme cette ressource a été augmentée par investissement $\theta \neq 0$).

Cette variation $\delta \theta_k$ équivaut à une variation $\delta n_k = \delta \theta_k$ de n_k (car $n_k - \theta_k = b_{k0} - \sum_i a_{ki} y_i$) qui entraîne une variation

$$y_{ik} \delta n_k = -y_{ik} y_{ki} \delta \theta_i \text{ de } y_i$$

Par ailleurs, on obtient directement : $\delta y_i = -y_{ki} \delta \theta_i$ et en rapprochant, on a :

$$y_{ki} = y_{ik} y_{ki}$$



Dans le cas particulier où : $y_i = n_i$ correspondant à θ_i

$$y_{ki} = y_{ik} y_{ki} - 1$$

Si on transpose aux coefficients $\mu_k = z_k - c_k$

$$\mu_i = \mu_k y_{ki}$$

4°) - La fonction économique d'après la proposition 3 peut s'écrire de deux manières, suivant qu'on l'exprime en fonction des coordonnées strictes dans le nouveau problème (variables θ nulles) ou en fonction des coordonnées strictes du problème initial, on a donc :

$$\varphi = \sum_{(b)} p_i b_i = \sum_{(b)} -p_i b_{i0} + p_{m+1} (D + \sum_i \kappa_i b_{i0})$$

3.5.3. - RETOUR sur la PROPOSITION 6 - VARIATION des COEFFICIENTS a_{ij} .

3.5.3.1. - Variation du coefficient a_{ij} d'un vecteur P_i appartenant à la structure du maximum.

Dans la proposition 6, il avait été envisagé des variations différentielles des coefficients a_{ij} . Il convient aussi d'envisager des variations arbitrairement grandes.

Lemme préliminaire :

On peut toujours disposer les lignes et les colonnes de la matrice A des a_{ik} formées des composantes des vecteurs P_k de la base du maximum, dans la base initiale de telle sorte que le terme a_{ij} soit dans la dernière ligne et dans la dernière colonne de A.

Par analogie avec le raisonnement qui a conduit à l'énoncé de la proposition 11, on peut définir 4 sous-matrices :

$$\begin{vmatrix} a_{m-1,m-1} & b_{m-1,1} \\ c_{1,m-1} & d_{11} \end{vmatrix}$$

correspondant aux 4 sous-matrices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, de A^{-1}_{mm}

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m-1,m-1} & \beta_{m-1,1} \\ \gamma_{1,m-1} & \delta_{11} \end{vmatrix}$$

Et comme $A \cdot A^{-1} = I$, on a les 4 relations :

$$\begin{vmatrix} \alpha d + b \gamma = I_{m-1,m-1} \\ \alpha \beta + b \delta = 0_{m-1,1} \\ \epsilon d + d \gamma = 0_{1,m-1} \\ c \beta + d \delta = 1_{11} \end{vmatrix}$$

En appelant $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ les matrices correspondant à la valeur d_0 de d , on établit aisément les 4 relations suivantes :

$$\begin{vmatrix} \alpha = \alpha_0 - \frac{(d-d_0) \beta_0 \gamma_0}{1 + \delta_0 (d-d_0)} \\ \beta = \frac{\beta_0}{1 + \delta_0 (d-d_0)} \\ \gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \delta_0 (d-d_0)} \\ \delta = \frac{\delta_0}{1 + \delta_0 (d-d_0)} \end{vmatrix}$$

Il est donc possible de définir la nouvelle matrice A^{-1} à partir des 4 sous-matrices de $\hat{A}^{-1}$ si on fait varier le terme d à partir d'une valeur d_0 .

3.5.3.2. - Variation d'un coefficient a_{ij} d'un vecteur P_i appartenant à la base du maximum -

1°) Nouvelle expression de A^{-1} :

La matrice A^{-1} est formée par les composantes des vecteurs e_j de la base initiale sur les vecteurs de la base du maximum. Elle sera donc formée, au signe près, des composantes des vecteurs relatifs aux variables d'écart de la base du maximum.

Si pour $a_{ij} = \hat{a}_{ij}$, $\hat{y}_{ke}$ est la composante sur le vecteur P_k de la base du maximum, du vecteur P_e correspondant à la variable d'écart de la $e^{\text{ème}}$ équation, les composantes de A^{-1} seront : $\epsilon_e \hat{y}_{ke}$ ($\epsilon_e = 1$ si la variable d'écart est précédée du signe plus, $\epsilon_e = -1$ dans le cas contraire).

Pour a_{ij} différent de $\hat{a}_{ij}$, d'après le lemme préliminaire, il est facile de voir que les composantes de A^{-1} seront $\epsilon_e y_{ke}$, telles que :

$$y_{ke} = \hat{y}_{ke} - \frac{(a_{ij} - \hat{a}_{ij}) \epsilon_j \hat{y}_{kj} \hat{y}_{ie}}{1 + \epsilon_j \hat{y}_{ij} (a_{ij} - \hat{a}_{ij})}$$

Si Λ_{ij} est la matrice m, m , d'éléments λ_{ij} tels que :

$$\lambda_{ke} = 0 \quad \text{pour } k \neq i, \quad k \in (1, \dots, m)$$

$$\lambda_{ki} = \frac{(a_{ij} - \hat{a}_{ij}) \epsilon_j \hat{y}_{kj}}{1 + \epsilon_j \hat{y}_{ij} (a_{ij} - \hat{a}_{ij})}$$

On voit que la matrice $\hat{A}^{-1}$ devient A^{-1} telle que :

$$A^{-1} = (I - \Lambda_{ij}) \hat{A}^{-1} \quad = \text{matrice unité } m, m.$$

2°) Transformé d'un vecteur quelconque :

La matrice $P_e (a_{ij})$ des composantes d'un vecteur P_e dans la base initiale devient la matrice $\Pi_e (y_{ke})$ dans la base du maximum :

$$\Pi_e = A^{-1} P_e = (I - \Lambda_{ij}) \hat{A}^{-1} P_e = (I - \Lambda_{ij}) \hat{\Pi}_e$$

En développant :

$$y_{ke} = \hat{y}_{ke} - \frac{(a_{ij} - \hat{a}_{ij}) \epsilon_j \hat{y}_{kj} \hat{y}_{ie}}{1 + \epsilon_j \hat{y}_{ij} (a_{ij} - \hat{a}_{ij})}$$

En particulier pour le vecteur $P -$

$$y_k = \hat{y}_k - \frac{(a_{ij} - \hat{a}_{ij}) \epsilon_j \hat{y}_{kj} \hat{y}_i}{1 + \epsilon_j \hat{y}_{ij} (a_{ij} - \hat{a}_{ij})} \dots / \dots$$

3°) Transformés des coefficients marginaux p_e :

on a : $p_e = ze - ce = C' A^{-1} p_e - ce$

avec : $C' = \bar{C}' - (a_{ci} - \bar{a}_{ci}) q_i w_i$

(W_i = matrice $m, 1$ où tous les éléments sont nuls sauf le i ème égal à 1).

et : $A^{-1} = (I - \Lambda_{ci}) \bar{A}^{-1}$

En explicitant il vient :

$$p_e = \bar{p}_e - \frac{(a_{ci} - \bar{a}_{ci}) \bar{y}_{ci} (q_i + \epsilon_i p_i)}{1 + \epsilon_i \bar{y}_{ci} (a_{ci} - \bar{a}_{ci})}$$

En particulier la transformé de $\hat{y}$ sera :

$$\hat{y} = \hat{y}_0 - \frac{(a_{ci} - \bar{a}_{ci}) \bar{y}_{ci} (q_i + \epsilon_i p_i)}{1 + \epsilon_i \bar{y}_{ci} (a_{ci} - \bar{a}_{ci})}$$

D'où PROPOSITION 13 :

Si on fait varier le coefficient a_{ij} d'un vecteur P_i appartenant à la structure du maximum de la quantité $a_{ij} - \bar{a}_{ci}$, la matrice SIMPLEXE devient :

$$S = (I - \Lambda_{ci}) \bar{S}$$

Λ_{ci} = matrice m, m d'éléments λ_{kl} tels que : $\lambda_{kl} = 0$ pour $l \neq i$

$$\lambda_{ki} = \frac{(a_{ci} - \bar{a}_{ci}) \epsilon_i \bar{y}_{ci}}{1 + \epsilon_i \bar{y}_{ci} (a_{ci} - \bar{a}_{ci})}$$

- en développant : $y_{kl} = \bar{y}_{kl} - \frac{(a_{ci} - \bar{a}_{ci}) \epsilon_i \bar{y}_{ci} \bar{y}_{kl}}{1 + \epsilon_i \bar{y}_{ci} (a_{ci} - \bar{a}_{ci})}$

Les composantes de P (y_k) seront considérées comme des y_k .

Les coefficients marginaux p_e seront considérés comme des y_e où $\epsilon_i \bar{y}_{ci}$ est remplacé par $(q_i + \epsilon_i p_i)$

Le maximum de la fonction économique sera considéré comme un y_0 avec la même correction que pour p_e

REMARQUE :

Si la ressource b_i n'est pas stricte, le vecteur P_j correspondant à la variable d'écart de la j ème équation fait partie de la structure du maximum : $y_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $y_{jj} = 1$

Par suite les seules variations de la matrice SIMPLEXE sont relatives à la ligne j où : $y_{je} = \dot{y}_{je} - (a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \epsilon_j \dot{y}_{je}$

à la ligne des coefficients marginaux où : $\mu_i = \dot{\mu}_i - (a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \dot{y}_{je} q_j$

au maximum de $\hat{q}$: $\hat{q} = \hat{q}_0 - (a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \dot{y}_{je} q_j$

Il était évident à priori qu'il n'y avait pas "reconversion" de la quantité de ressource libérée si la ressource n'était pas stricte initialement.

3.5.3.3. - Variation d'un coefficient a_{ij} d'un vecteur P_i ne faisant pas partie de la structure du maximum -

Le vecteur P_i de composante a_{ij} , $j \in (1 - m)$ dans la base initiale a pour composantes dans la base du maximum les éléments de la matrice Π_i

$$\Pi_i = A^{-1} P_i$$

Si on fait varier la composante a_{ij} de P_i à partir de $\dot{a}_{ij}$, Π_i devient :

$$\Pi_i = \dot{\Pi}_i + (a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \Pi_j$$

où Π_j = matrice formée des composantes de e_j dans la base du maximum = matrice formée des $\epsilon_j y_{kj}$ où y_{kj} est la composante de la variable d'écart de la j ème équation sur le vecteur P_k de la base du maximum.

Ce coefficient marginal de P_i devient :

$$\mu_i = \dot{\mu}_i + (a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \epsilon_j \dot{\mu}_j$$

avec μ_j = coefficient marginal correspondant à la variable d'écart de la j ème équation.

On peut écrire cette transformation de la matrice SIMPLEXE sous la forme $S = \dot{S} + T_{ij}$ où T_{ij} est une matrice de même dimension que la matrice SIMPLEXE d'éléments tous nuls sauf ceux de la j ème colonne qui sont égaux à $(a_{ij} - \dot{a}_{ij}) \epsilon_j \dot{y}_{kj}$

Par suite si δ_{ij} est un indicateur égal à 1 si a_{ij} appartient à un vecteur de la structure du maximum et égal à 0 dans le cas contraire on a sous la forme la plus générale

$$S = [I - \delta_{ij} \Lambda_{ij}] [S_0 + (1 - \delta_{ij}) T_{ij}]$$

où Λ_{ij} et T_{ij} = matrices déjà mentionnées.

d'où PROPOSITION 14 :

Tous les résultats relatifs à la variation d'un coefficient s'expriment sous la forme d'un produit matriciel, on peut paramétrer toute la matrice Simplexe sous forme d'un produit matriciel.

REMARQUES :

1°) Les variations $a_{ij} - \hat{a}_{ij}$ doivent être suffisamment faibles pour que les conditions du maximum soient respectées.

Si ce n'est pas le cas on passera continuellement de 0 à $a_{ij} - \hat{a}_{ij}$ en faisant les changements de structure qui s'imposent pour les changements de signe des y_i ou p_i (Propositions 7 et 10).

2°) Dans le cas où P_i n'appartient pas à la structure du maximum

pour $a_{ij} \geq \hat{a}_{ij} - \frac{\hat{p}_i}{|\epsilon_i \hat{p}_i|}$ aucune variation de la structure
 pour $a_{ij} \leq \hat{a}_{ij} - \frac{\hat{p}_i}{|\epsilon_i \hat{p}_i|}$, $\hat{p}_i$ devient négatif et par suite P_i devra rentrer dans la structure du maximum.

Donc il est possible de faire entrer dans la structure de production un produit non fabriqué en agissant sur le coefficient de consommation d'une ressource stricte.

Evidemment pour $\hat{p}_i = 0$ il n'y a aucune variation de structure quelle que soit la variation de a_{ij} .

3.6. - RECAPITULATION

3.6.1. -

a) - Du point de vue mathématique, il importe de remarquer que les résultats précédents ont permis de discuter entièrement le problème suivant :

Rendre au maximum une fonction : $\varphi = \sum_i c_i y_i$

compte tenu de : $\sum_i a_{ij} y_i \leq b_j \quad j \in (1 \dots m)$

en fonction d'une variation quelconque des paramètres a_{ij} , b_j , et c_i .

En effet, on sait calculer les variations correspondantes de toutes les quantités de la matrice SIMPLEXE du maximum et en particulier celles des y_i et des μ_k

Par ailleurs, on a vu les processus qui permettaient de retrouver la structure du maximum, si les conditions $y_i \geq 0$ et $\mu_k \geq 0$ pour tout i et pour tout k ne sont pas vérifiées.

b) - Plus généralement, nous pouvons envisager la discussion du problème généralisé :

Rendre maximum $\varphi = \sum_i c_i y_i$

compte tenu de $\sum_i a_{ij} y_i \leq b_j \quad j \in (1 \dots m)$

$$\sum_i \kappa_i b_i \leq 0$$

dans lequel les seconds membres des inéquations sont liés par une relation linéaire et ceci pour toute variation des paramètres a_{ij} , b_j et c_i .

c) - Les variations des paramètres a_{ij} , b_j et c_i étant arbitraires, on peut fort bien envisager le cas où ces paramètres sont fonction quelconque d'une ou plusieurs variables indépendantes. Toute variation des paramètres s'exprime sous forme de produits matriciels.

En particulier, si ces paramètres sont fonction du temps, le problème est rendu dynamique.

Cette souplesse dans la discussion va permettre d'envisager les autres types de fonction économique.

....

fonction
3.6.2. - Marge bénéficiaire des quantités produites.

Nous avons vu que les marges bénéficiaires unitaires $c_i = p_i(y_i) - \sum_j a_{ij} q_j(\sum_i a_{ij} y_i)$ pouvaient varier en fonction des quantités produites y_i pour deux raisons :

- 1°) - Variation des prix de vente p_i en fonction des quantités produites
- 2°) - Variation des prix d'achat q_j des ressources j en fonction des quantités de ressource achetée

Nous n'envisagerons que le cas où les c_i sont fonctions par paliers des quantités produites ou utilisées. Nous aurons un processus de variation discontinu.

Si les prix de vente sont fonction par paliers des quantités produites, on aura la relation :

$$p_i = p_{i0} \quad \text{pour : } l_i \leq y_i \leq L_i$$

Si les prix d'achat sont fonction par paliers des quantités achetées, on aura :

$$q_j = q_{j0} \quad \text{pour : } u_j \leq \sum_i a_{ij} y_i \leq U_j$$

et par suite :

$$c_i = c_{i0} \quad \text{pour : } \left| \begin{array}{l} l_i \leq y_i \leq L_i \\ u_i \leq \sum_j a_{ij} y_j \leq U_j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i \in (1 \dots n) \\ j \in (1 \dots m) \end{array}$$

Il suffit d'ajouter ces relations aux relations initiales :

$$\sum_j a_{ij} y_j \leq b_i \quad \text{ou } \geq$$

pour déterminer le maximum de la marge bénéficiaire totale $\varphi = \sum c_i y_i$

Il y aura donc autant de programmes linéaires à résoudre qu'il y a de combinaisons de paliers pour les marges bénéficiaires unitaires c_i . S'il y a p_i paliers pour chaque variable active y_i , il y aura $\prod p_i$ programmes à résoudre.

La solution sera donnée par le programme linéaire qui présente la valeur du maximum de la fonction économique la plus élevée.

En fait, l'étude peut être grandement simplifiée si on utilise des résultats précédemment acquis sur la variation des composantes de P (propositions 4 et 7) et sur les variations des coefficients économiques c_i (proposition 10).

Partant de conditions initiales données : $c_i = c_{i0}$, le maximum de la fonction économique sera fonction des paramètres : l_i, L_i, u_j, u_j

$$\varphi = \varphi(l_i, L_i, u_j, u_j) \quad i \in (1 \dots n) \quad j \in (1 \dots m)$$

En faisant varier systématiquement ces paramètres dans tout le domaine de variation envisagé, on pourra suivre la variation de φ et à l'aide des coefficients marginaux, on se dirigera constamment dans le sens des φ croissants et par suite au bout d'un nombre fini d'étapes, on atteindra le maximum maximorum de φ

Pour éviter d'aboutir à un maximum isolé, il conviendra "d'explorer" le voisinage de la solution.

REMARQUE.-

Evidemment, la même méthode est applicable au problème de l'expansion envisagé dans la deuxième partie. De plus, dans ce cas la discussion des paramètres a_{ij} , b_j et c_i est toujours possible.

3.6.3. - Cas des accroissements des ressources discontinues :

Dans le problème d'expansion traité précédemment, l'accroissement des ressources est supposé continu. Un tel raisonnement est valable dans le cas de ressource à accroissements discrets, si les variations élémentaires des quantités de ressource sont petites par rapport aux ressources existantes.

Si tel n'est pas le cas, il convient de procéder différemment.

Il est toujours possible de définir, en fonction de la dépense d'investissement une liste progressive des possibilités d'augmentation de ressources.

En ajoutant aux valeurs b_{j0} du problème initial, les accroissements de ressource correspondants, il est toujours possible de décider si tel accroissement est plus rentable ou non que tel autre (on se servira à cet effet des coefficients marginaux).

On trouvera donc le plan d'expansion par "tâtonnements limités".

On aura intérêt à traiter le "cas continu équivalent" qui servira de fil conducteur dans ce tâtonnement.

3.7. - DISCUSSION ECONOMIQUE.-

3.7.1. - Les propositions énoncées dans la deuxième partie permettent d'envisager la discussion de tous les paramètres, conditionnant la rentabilité de l'entreprise.

On pourra discuter plus complètement les problèmes déjà mentionnés dans la discussion économique de la première partie (§ 2.5) :

- Problèmes de choix
 - d'affectation des moyens de production
 - de modification de structure de production
 - de productivité
 - de politique d'achat et de vente
 - d'amortissement

Il est, de plus, possible de discuter le problème de l'investissement :

1°) - Si on effectue un investissement différent de celui qu'indique le problème de rentabilité maximum, il suffira d'étudier à l'aide des variables θ_j les effets de cet investissement. ($b_j - b_{j0} = \theta_j$)

2°) - Variation des coûts d'investissement :

$$\text{Dans la relation : } \sum_i \kappa_i (a_{ij} y_i + n_i) + \theta_{m+1} = D + \sum_i \kappa_i b_{ij}$$

une variation de K_j entraîne une variation des coefficients $K_j a_{ij}$ de la matrice de consommation, et une variation de la composante de P_0 suivant P_{m+1} .

Il est facile, d'après les propriétés démontrées plus haut, de trouver l'effet de ces variations et par suite de discuter des variations des coûts d'investissement.

3.7.3. - On peut remarquer que l'équation :

$$\varphi = \sum_i -\mu_i b_{i0} + \mu_{m+1} (D + \sum_i \kappa_i b_{ij})$$

définit la marge bénéficiaire totale comme fonction linéaire de la dépense d'investissement.

En particulier, si $b_{j0} = 0$ pour tout j .

$$\varphi = \mu_{m+1} D$$

Par suite, si une entreprise s'est développée depuis l'origine suivant le plan de rentabilité maximum, sa marge bénéficiaire est le produit de sa valeur d'investissement (immobilisations + amortissements réévalués) par sa rentabilité marginale.

3.7.4. - Il sera évidemment possible de discuter la politique financière de l'entreprise.

En effet, la marge bénéficiaire doit être supérieure aux coûts fixes pour qu'il y ait un bénéfice.

Les coûts fixes sont des coûts de structure qui varient en fonction des investissements nouveaux et il sera possible de déterminer la variation du bénéfice. Ensuite, on définira, compte tenu de ces résultats, s'il est préférable d'investir par auto-financement ou par appel au marché financier.

3.7.5. - Le principal obstacle s'opposant à l'application de la programmation linéaire à la théorie de l'entreprise pourrait être la difficulté de connaître les différents paramètres intervenant dans le calcul. Or, on peut remarquer que si l'on a appliqué dans l'entreprise une méthode de contrôle budgétaire ou de coûts standards, on a tous les éléments techniques permettant de poser les équations du problème.

Inversement d'ailleurs, l'étude du problème clarifiera sensiblement le problème du contrôle budgétaire et permettra de l'asseoir sur des bases saines puisque le contrôle budgétaire suppose, pour être appliqué, la détermination d'un programme de production précis.

Initialement d'ailleurs, il n'est pas nécessaire de descendre au niveau d'affectation le plus bas, on pourra fort bien travailler par grande famille de ressources (ateliers de production par exemple).

Les problèmes posés par le calcul ne présentent pas de difficultés.

Manuellement, il est possible de traiter en quelques heures un programme comportant une dizaine de relations et une dizaine de produits. Avec un ordinateur, on peut résoudre un problème comportant une quarantaine d'équations et une centaine de produits en moins d'une heure.

En résumé, l'application de la programmation linéaire dans la théorie de l'entreprise se révèle comme un outil particulièrement puissant dans la gestion scientifique de l'entreprise.-

4 - NOTE COMPLEMENTAIRE SUR LA RESOLUTION SEQUENTIELLE DES PROGRAMMES LINEAIRES

I - Méthode séquentielle en ligne -

Cette méthode permet de résoudre un problème de programmation linéaire par étapes successives dont chacune est constituée par l'addition d'une contrainte supplémentaire, au problème déjà résolu.

Cette méthode présente les avantages suivants :

- a - Elle évite de recommencer entièrement les calculs dans le cas où, une contrainte supplémentaire est ajoutée.
- b - Elle permet de mesurer l'influence séparée de chaque contrainte par rapport aux contraintes déjà introduites.

Soit S_m la matrice Simplexe relative à la base du maximum d'un problème P_m à m contraintes et soit une contrainte supplémentaire :

$$\sum a_{i,m+1} x_i \leq b_i$$

T étant l'un des signes $\geq$ ou $\leq$

Si on rapporte la matrice Simplexe S_{m+1} à la base $R_1 \dots R_m, P_m + n + 1$, constituée par les vecteurs $R_1 \dots R_m$ de la base du maximum de P_m et le vecteur $P_m + n + 1$, correspondant à la variable d'écart de la $(m+1)$ ème contrainte, la matrice S_{m+1} , comporte une colonne supplémentaire relative à $P_m + n + 1$, dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne $m+1$ égal à 1, et une ligne supplémentaire relative à la $m+1$ ème contrainte.

Les composantes de tous les P_i sur les R_j sont les mêmes que celles données par la matrice S_m .

En faisant un raisonnement analogue à celui qui a conduit à la proposition 12, les composantes des P_i ou R_i sur $P_m + n + 1$ sont :

$$x_{m+1,i} = (\lambda_i - \alpha' \Pi_i) \varepsilon_{m+1}$$

avec : $\lambda_i = a_{i,m+1}$

$$\alpha' = (a_{1,m+1} \dots a_{m,m+1})$$

vecteurs de la base du maximum de P_m sur e_{m+1} matrice formée des composantes des

Π_i = matrice $m,1$ des composantes de P_i sur la base $R_1 \dots R_m$.

$\varepsilon_{m+1} = 1$ si T est le signe $\leq$, $\varepsilon_{m+1} = -1$ dans le cas contraire.

.../...

On a en particulier :

$$x_{m+1} = \varepsilon_{m+1} (b_{m+1} - \alpha' \Pi_0)$$

2 cas possibles :

1°) $x_{m+1} \geq 0$, S_{m+1} est alors la matrice du maximum de J_{m+1} puisque $x_i \geq 0$ pour tout i et $\mu_j \geq 0$ pour tout j .

2°) $x_{m+1} < 0$

On peut toujours ajouter à b_{m+1} une quantité h telle que :

$$h + b_{m+1} - \alpha' \Pi_0 = 0$$

On fera tendre h vers 0 en faisant des changements de base appropriés (Voir proposition 7).

On obtient ainsi la résolution de J_{m+1} à partir de celle de J_m

La solution de J_1 est évidente.

Remarque :

Il semble qu'il y ait intérêt, si l'ordre des contraintes n'est pas imposé, à introduire successivement des contraintes qui modifient à chaque stade la structure du maximum précédemment trouvée.

En effet si on les faisait intervenir à une étape ultérieure, la modification de la matrice Simplexe serait plus longue. Dans ce but il suffira de former à chaque stade le produit $\varepsilon_{m+1} (b_{m+1} - \alpha' \Pi_0)$ pour toutes les contraintes restantes, possibles au rang $m+1$, et de choisir celle qui correspond à la valeur négative la plus faible.

II - Méthode séquentielle en colonne -

Au lieu d'ajouter une contrainte supplémentaire, on peut ajouter une variable supplémentaire x_{m+1} , le vecteur P_{m+1} correspondant à cette variable ayant dans la base $e_1, \dots, e_m$, les composantes $a_{1,m+1}, \dots, a_{m,m+1}$.

Dans la base du maximum $R_1 \dots R_m$ le vecteur P_{m+1} sera représenté par la matrice

$$\Pi_{m+1} = A^{-1} P_{m+1}$$

Si $\mu_{m+1} = z_{m+1} - c_{m+1} = C' A^{-1} \Pi_{m+1} - c_{m+1} \geq 0$

La solution du maximum est obtenue.

Sinon on se trouvera ramené au cas classique et on effectue les changements de base appropriés.

5. - EXEMPLE d'APPLICATION.-

4.1 - POSITION DU PROBLEME.-

Pour illustrer l'application de la programmation linéaire à la théorie de l'entreprise, nous donnerons un exemple fictif relativement simple,

Supposons avoir affaire à une entreprise de construction électrique produisant trois articles A₁, A₂, A₃.

- A₁ : radiateur électrique
- A₂ : fer à repasser
- A₃ : grille-pain électrique.

La Direction Commerciale après étude du marché estime qu'il serait possible de fixer des quotas de vente au réseau commercial, conduisant à une production journalière de :

- 3.000 articles A₁
- 4.000 articles A₂
- 4.000 articles A₃

à des prix tels que dans les conditions actuelles du marché, il soit possible avec les moyens de production existants et les prix actuels du marché fournisseur, de dégager par article les marges bénéficiaires suivantes :

- 1.200 Fr pour l'article A₁
- 1.000 pour l'article A₂
- 600 pour l'article A₃

La production de ces 3 articles s'effectue dans les 3 ateliers:

- Atelier d'emboutissage et de chromage où sont emboutis puis chromés, les éléments de tôle des appareils électriques.
- Atelier de préparation des éléments électriques (résistances, moteurs, etc ...)
- L'atelier de montage et de finition reçoit les éléments des ateliers d'emboutissage et de préparation, les assemble, procède au contrôle et à l'emballage des articles finis.

Ces trois ateliers constituent les ressources propres de l'entreprise.

Un système de chronométrage étant appliqué dans l'entreprise, les ateliers peuvent disposer d'un potentiel de production de 60.000 pts bedeaux.

.../...

Chaque article nécessite dans les conditions actuelles de travail, dans chaque atelier, une quantité de travail donnée par le tableau suivant, exprimée en points bedeaux.

Articles	Ateliers		
	E	P	M
A_1	30	50	40
A_2	50	50	50
A_3	100	60	80

E = Emboutissage

P = Préparation

M = Montage.

Les ateliers sont tels que le matériel est peu spécialisé, de sorte que les moyens destinés à la production d'un article donné, peuvent être affectés facilement, si besoin est, à la production d'un autre article.

Dans l'état actuel, la production est la suivante :

500 articles A_1

400 articles A_2

250 articles A_3

Les 3 ateliers de production travaillent donc à plein et ne disposent d'aucune possibilité de production supplémentaire.

La marge bénéficiaire journalière est alors : 1.150.000 Fr, ce qui donne une marge bénéficiaire annuelle de 276.000.000,- (pour 240 jours de production).

Les charges fixes annuelles représentent 200.000.000 Fr de telle sorte que le bénéfice annuel est : 76.000.000 Fr.

Le problème qui se pose à l'entrepreneur est de décider s'il peut améliorer ses bénéfices, en structurant différemment sa production.

4.2 - ETUDE de PROGRAMMATION LINEAIRE.-

En appelant x_1 , x_2 , x_3 , les quantités d'articles A_1 , A_2 , A_3 à produire, nous aurons les relations suivantes :

... , ...

Contraintes de production :

$$30 x_1 + 50 x_2 + 100 x_3 \leq 60.000 \quad \text{Atelier E}$$

$$50 x_1 + 50 x_2 + 50 x_3 \leq 60.000 \quad \text{Atelier P}$$

$$40 x_1 + 50 x_2 + 80 x_3 \leq 60.000 \quad \text{Atelier M}$$

Contraintes du marché :

$$x_1 \leq 3.000$$

$$x_2 \leq 4.000$$

$$x_3 \leq 4.000$$

Marge bénéficiaire :

$$\varphi = 1200 x_1 + 1000 x_2 + 600 x_3$$

En prenant comme unité de travail 10 pts bedeaux et comme unité de marge bénéficiaire 1.000 Fr, le problème consiste à maximiser

$$\varphi = 1,2 x_1 + 1 x_2 + 0,6 x_3$$

compte tenu des contraintes :

$$3 x_1 + 5 x_2 + 10 x_3 \leq 6.000$$

$$5 x_1 + 5 x_2 + 6 x_3 \leq 6.000$$

$$4 x_1 + 5 x_2 + 8 x_3 \leq 6.000$$

$$x_1 \leq 3.000$$

$$x_2 \leq 4.000$$

$$x_3 \leq 4.000$$

x_1, x_2, x_3 positifs ou nuls.

En introduisant les variables d'écart, les relations précédentes deviennent :

$$3 x_1 + 5 x_2 + 10 x_3 + n_1 = 6.000$$

$$5 x_1 + 5 x_2 + 6 x_3 + n_2 = 6.000$$

$$4 x_1 + 5 x_2 + 8 x_3 + n_3 = 6.000$$

$$x_1 + n_4 = 3.000$$

$$x_2 + n_5 = 4.000$$

$$x_3 + n_6 = 4.000$$

La matrice SIMPLEXE est représentée (voir tableau T₁ en annexe), relativement à la base de départ constituée par les vecteurs correspondant aux variables d'écart, (et repérée d'après la variable correspondante - P₀ est composée des seconds membres des équations).

En utilisant la méthode classique, on obtient la structure du maximum et la matrice SIMPLEXE correspondante (tableau T₂).

On voit que le maximum de marge bénéficiaire sera atteint par la production exclusive de l'article 1, au nombre de 1.200 unités par jour.

La marge bénéficiaire journalière est 1.440.000 Fr ; elle est environ de 25 % supérieure à la marge bénéficiaire, obtenue avec l'ancien plan de production. Elle porte le bénéfice annuel à 145.600.000 Fr, soit une augmentation de plus de 90 %.

Par ailleurs, le potentiel de production n'est pas utilisé dans sa totalité. Seul l'atelier de préparation est un "goulot d'étranglement". Il reste 24.000 points inutilisés à l'atelier d'emboutissage, et 12.000 à l'atelier de montage.

Autrement dit, en utilisant incomplètement le potentiel de production, l'entreprise réalise néanmoins une marge bénéficiaire supérieure.

REMARQUE.-

Il pourrait paraître évident que la structure de production la meilleure est celle qui conduit à celle de l'article qui présente la marge bénéficiaire la plus élevée. Il n'en est rien.

Cette proposition pourrait faire l'objet d'une démonstration générale mais un contre-exemple suffira à l'établir.

Supposons une production de deux articles, telle que :

$$5 x_1 + x_2 \leq 50$$

$$4 x_1 + x_2 \leq 40$$

L'article 1 produit une marge bénéficiaire égale à 10

L'article 2 produit une marge bénéficiaire égale à 3

L'article 1 pourra être produit au maximum à 10 unités procurant une marge bénéficiaire égale à 100.

L'article 2 pourra être produit au maximum à 40 unités et procurera une marge bénéficiaire égale à 120 (c'est la solution du programme linéaire).

La production de l'article 2 est plus rentable que la production de l'article 1, bien que sa marge bénéficiaire soit plus faible et qu'il utilise incomplètement le potentiel de production.

.../...

4.3 - DISCUSSION DES RESULTATS.

4.3.1. - Structure de production :

Les composantes de Po dans la structure du maximum représentent les quantités rendant la marge bénéficiaire maximum.

En examinant les coefficients marginaux $z_k - c_k$, on voit que si l'on désire produire l'article A_2 , la marge bénéficiaire diminue de $2/10$ d'unité monétaire, par article, soit 200 Fr.

Les composantes de Po varient alors des quantités x_{ik} correspondantes, par exemple x_1 diminue de une unité (le coefficient d'équivalence est 1)

On consommera deux unités de travail, soit 20 points bedeaux d'emboutissage non utilisés (ce qui correspond bien à la différence de consommation unitaire d'emboutissage : $50 - 30 = 20$.)

Même raisonnement pour l'article A_3 .

On remarque en particulier que : si $x_2 = 400$, $x_3 = 250$ -

x_1 devient : $1200 - 1 \times 400 - 6/5 \times 250 = 500$

η_1 devient : $2400 - 2 \times 400 - 32/5 \times 250 = 0$

η_3 devient : $1200 - 1 \times 400 - 16/5 \times 250 = 0$

et la marge bénéficiaire :

$$1440 - 2/10 \times 400 - 42/50 \times 250 = 1.150 \text{ unités.}$$

soit : 1.150.000 Fr.

On retrouve bien la structure de production initiale.

4.3.2. - Problème d'achat et de vente :

La marge bénéficiaire totale est :

$$c_1 x_1 = 1,2 \times 1200 = 1.440 \text{ unités,}$$

soit : 1.440.000 Fr

En connaissant les coûts des quantités consommées, il est facile de déterminer l'incidence d'une modification de la politique d'achat.

Si par exemple, chaque article A_1 nécessite 1,800 kg de tôle achetée 100 Fr le kg, une variation de 1 Fr sur le prix unitaire du kg de tôle aura pour conséquence une variation de 1Fr.80 sur la marge bénéficiaire unitaire et par suite, il lui correspondra une variation de 2.160 Fr sur la marge bénéficiaire journalière.

La variation de marge bénéficiaire peut résulter aussi d'une variation du prix de vente.

.../...

4.3.3. - PROBLEME DE PRODUCTIVITE.-

- 1) - Supposons que le prix du point bedeau soit 10 Fr et qu'on calcule la variation de marge bénéficiaire attachée à chacun des coefficients de consommation pour une diminution de 1 point bedeau.

En appliquant la formule :

$$\frac{\Delta q}{\Delta a_{ij}} = - [q_j + (2j - 1)] y_i$$

on calculera facilement la rentabilité marginale relative à chaque coefficient de consommation.

Par exemple, pour le coefficient de consommation à l'atelier de préparation, relatif à l'article A₁, on a :

$$\Delta q = 1/10 \left[100 + 12/50 \times 1000 \right] \times 1200 = 40.800 \text{ Fr}$$

(En effet, une unité de travail étant 10 points bedeaux, q_j = 100 frs et il convient de diviser le résultat par 10 pour ramener à une variation de 1 point bedeau. Par ailleurs rappelons que l'unité monétaire est 1.000 Fr).

Autrement dit, si le coefficient de consommation à l'atelier de préparation pour l'article A₁, passe de 50 à 49 pts, la marge bénéficiaire augmentera de 40.800 Fr.

On trouve de même pour les autres coefficients, les résultats donnés par le tableau suivant :

	E	P	M
A ₁	12.000Fr	40.800 Fr	12.000Fr
A ₂	0	0	0
A ₃	0	0	0

Evidemment, une action de productivité limitée sur les articles non produits ne donne aucun résultat.

On remarque que l'action de productivité à l'emboutissage et au montage ne rapporte que 12.000 Fr par point, parce que ces deux ressources ne sont pas strictes.

Pour l'atelier de préparation, le gain supplémentaire de 28.800 Fr correspond à une augmentation de production égale à $\frac{28.800}{1.200} = 24$ articles A₁

Cette augmentation de production utilisera les 1.200 pts de travail libérés. (On trouve d'ailleurs directement $\Delta x_1 = 1/10 \times 1200 \times 1/5 = 24$).

2) - Au lieu de raisonner en termes différentiels, il peut être intéressant de raisonner en termes finis :

Par exemple : pour le même coefficient de montage sur l'article 1, on a, en appliquant la formule :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{(a_{ij} - \bar{a}_{ij}) (q_i + z_i) x_i}{1 + \bar{x}_{ij} (a_{ij} - \bar{a}_{ij})}$$

$$\Delta \varphi = - \frac{(a_{ij} - \bar{a}_{ij})}{1 + \frac{1}{\bar{r}} (a_{ij} - \bar{a}_{ij})} \left[100 + \frac{12}{10} 1000 \right] 1200.$$

$$\Delta \varphi = \frac{\bar{r} - a_{ij}}{\frac{a_{ij}}{\bar{r}}} 40800^F$$

pour $a_{ij} = 4,9$ (49 points).

$$\Delta \varphi = \frac{0,5}{4,9} \times 40.800 = \frac{50}{49} \times 40.800 \text{ Frs, soit sensiblement la valeur trouvée précédemment.}$$

Il est facile de voir que la structure de production initiale change quand le coefficient de consommation devient inférieur à 40 pts bedeaux.

3) - Il peut être intéressant de définir à partir de quel coefficient de consommation les articles A_1 et A_3 sont rentables et par suite figureront dans la structure de production.

On a vu qu'il serait inutile de faire un effort de productivité sur un coefficient de consommation d'une ressource non stricte pour un article non produit.

Seules seront donc à envisager les variations de consommation relatives à l'atelier de préparation.

Article 2 :

Le coefficient de consommation est 50 pts. S'il devient a_{ij} , le coefficient marginal $z_j - c_j$ de l'article 2 devient :

.../...

Par suite, il devient négatif pour $a_{ij} < 25/6$, soit 41,6 points.

Les coefficients x_{i2} du vecteur correspondant à x_2 deviennent :

$$x_{i2} = x_{i2}^0 + (a_{ij} - 5) y_{i2}$$

en appelant y_{i2} la composante de la variation d'écart η_2 .

Pour $a_{ij} = 41,6 \text{ pts} - \epsilon$, l'article 2 rentrera dans la structure de production à la place de η_3 , comme on peut le voir en calculant les nouveaux coefficients x_{i2} .

La nouvelle structure conduira à la production de 720 articles A_1 et 600 articles A_2 .

La marge bénéficiaire : $720 \times 1000 + 600 \times 1200 = 1.444.000 \text{ Fr}$

On remarquera qu'il n'y a pas passage continu entre 0 et 720 articles A_2 .

Articles 3 -

Si on fait varier d'un même coefficient de variation, le coefficient marginal relatif à l'article A_3 devient

$$\frac{42}{50} + (a_{ij} - 6) \frac{12}{50}$$

Il s'annule si $a_{ij} = 5/2$, soit 25 points.

L'article 3 rentre alors dans la structure de production à la place de η_3 , et on obtient :

$$x_3 = 200 \text{ unités}$$

$$x_1 = 1.100 \text{ unités}$$

La marge bénéficiaire est toujours : 1.440.000 Fr.-

4.4. - EXPANSION.-

Supposons que l'entrepreneur décide de produire uniquement l'article A_1 , comme l'indique la solution du maximum, sans rien changer aux marges bénéficiaires, ni aux coefficients de consommation.

Comme le marché de cet article n'est pas saturé puisqu'il reste des possibilités de vente journalière de 1.800 articles d'après les indications du service commercial. L'entrepreneur peut investir pour augmenter sa production.

On voit dans le tableau T_4 qu'il n'y a qu'à investir dans la ressource stricte, à savoir, l'atelier de préparation.

Chaque unité supplémentaire investie (à savoir le matériel conduisant à une augmentation de 10 pts bedeaux) apportera une marge bénéficiaire marginale de :

$$\frac{12}{50} \times 1.000 = 240 \text{ Fr}$$

par contre, les disponibilités des autres ressources diminueront.

En étudiant la variation des valeurs de la structure du maximum en fonction des accroissements de ressources, on voit que si b_2 augmente de 1.500, η_3 s'annule. L'atelier de montage est à son tour saturé.

Plus généralement, il convient d'étudier le problème de la rentabilité maximum de l'investissement.

Supposons qu'il faille en moyenne :

2.000 Fr d'investissement pour disposer d'un point bedeau en plus à l'atelier d'emboutissage,

1.400 Fr pour l'atelier de préparation

1.000 Fr pour l'atelier de montage.

L'unité de travail adoptée ici étant 10 pts bedeaux et l'unité monétaire 1.000 Fr, le coût d'investissement sera donc :

20 pour l'atelier d'emboutissage
14 pour l'atelier de préparation
10 pour l'atelier de montage.

Si D est la somme à investir, le problème généralisé est donc le suivant :

$$\text{Rendre maximum } \varphi = 1,2 x_1 + x_2 + 0,6 x_3$$

Compte tenu de :

$$3 x_1 + 5 x_2 + 10 x_3 \leq D_1$$

$$5 x_1 + 5 x_2 + 6 x_3 \leq D_2$$

$$4 x_2 + 5 x_3 \leq D_3$$

$$x_1 \leq 3.000$$

$$x_2 \leq 4.000$$

$$x_3 \leq 4.000$$

$$20(b_1 - 6000) + 14(b_2 - 6000) + 10(b_3 - 6000) \leq D$$

D'après la proposition 12, il suffit pour aborder ce problème, de modifier la matrice SIMPLEXE du programme initial, en ajoutant les 3 vecteurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, de composantes opposées à celles de η_1, η_2, η_3 , sur les vecteurs de la structure du maximum initial, et la ligne θ_{m+1} , où seules les composantes de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ seront différentes de 0, et vaudront respectivement :

20 - 14 - 10.-

Cette nouvelle matrice T_3 ne correspond pas à la structure du maximum. Il suffit de faire entrer le vecteur θ_2 à la place du vecteur θ_4 pour avoir une structure de maximum.

La valeur de $z_k - c_k$ correspondant à θ_4 représente la rentabilité marginale de l'investissement.

Les composantes de P_0 sont fonction linéaire de la dépense d'investissement. On voit que pour $D = 21.000$ (soit 21.000.000 de frs), θ_3 s'annule, c'est-à-dire que l'atelier de montage devient goulot d'étranglement.

La structure n'est alors plus valable et le vecteur h_3 doit être remplacé par le vecteur θ_3 (d'après proposition 7)

On a une nouvelle structure représentée par le tableau T_5 .

Finalement, en continuant à faire croître D , on aboutit au tableau T_5 où les limites du marché sont atteintes pour les 3 articles.

La variation des principaux paramètres en fonction de D a été graphiquée (voir annexe). On voit en particulier que la marge bénéficiaire journalière croît jusqu'à 10 millions pour un investissement de 2,582 milliards.

En faisant des hypothèses sur la variation des charges fixes, il est possible de discuter la meilleure méthode financière pour réaliser cet investissement. (Auto-financement ou marché financier).

Bien entendu, à chaque étape et pour toute valeur de D , on peut discuter les problèmes :

- variation de structure de production
- de politique d'achat et de vente
- de productivité
- d'investissement.

Cet exemple extrêmement sommaire dans sa formulation et sa discussion nous permet de voir l'intérêt de la programmation linéaire dans la théorie de l'entreprise en expansion.

Bien d'autres discussions seraient possibles, en particulier la variation des paramètres en fonction du temps ; il suffit d'utiliser les résultats démontrés dans la deuxième et troisième partie de cette étude pour pouvoir discuter complètement le problème.-

T1

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	P_0
0	η_1	3	5	10	1	0	0	0	0	0	6000
0	η_2	5	5	6	0	1	0	0	0	0	6000
0	η_3	4	5	8	0	0	1	0	0	0	6000
0	η_4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3000
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	4000
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4000
$Z_i - C_i$		-1,2	-1	-0,6	0	0	0	0	0	0	

T2

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	P_0
0	η_1	0	2	$\frac{32}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	0	2400
1,2	x_1	1	1	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1200
0	η_3	0	1	$\frac{16}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	0	1200
0	η_4	0	-1	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	0	1800
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	4000
	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4000
$Z_i - C_i$		0	$\frac{2}{10}$	$\frac{42}{50}$	0	$\frac{12}{50}$	0	0	0	0	

3

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$P_i \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	η_1	0	2	$\frac{32}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	0	0	-1	$\frac{3}{5}$	0	2400
1,2	x_1	1	1	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	1200
	η_3	0	1	$\frac{16}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	0	0	0	$\frac{4}{5}$	-1	1200
0	η_4	0	-1	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	1800
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4000
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
0	θ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20	14	10	D
$Z_i - C_i$		0	0,2	$\frac{42}{50}$	0	$\frac{12}{50}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{12}{50}$	0	

T4

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$P_i \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	η_1	0	2	$\frac{32}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{3}{70}$	$-\frac{13}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$2400 - \frac{3D}{70}$
1,2	x_1	1	1	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{70}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$1200 + \frac{D}{70}$
0	η_3	0	1	$\frac{16}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{4}{70}$	$-\frac{8}{7}$	0	$-\frac{11}{7}$	$1200 - \frac{4D}{70}$
0	η_4	0	-1	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{70}$	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$1800 - \frac{D}{70}$
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4000
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
0	θ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{20}{14}$	1	$\frac{10}{14}$	$\frac{D}{14}$
$Z_i - C_i$		0	$\frac{2}{10}$	$\frac{42}{50}$	0	$\frac{12}{50}$	0	0	0	0	$\frac{6}{350}$	$\frac{12}{35}$	0	$\frac{6}{35}$	

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	η_1	0	$\frac{19}{11}$	$\frac{304}{55}$	1	$-\frac{21}{55}$	$-\frac{3}{11}$	0	0	0	$-\frac{3}{110}$	$-\frac{17}{11}$	0	0	$\frac{22800}{11} - \frac{3D}{110}$
1,2	x_1	1	$\frac{12}{11}$	$\frac{82}{55}$	0	$\frac{7}{55}$	$\frac{1}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{110}$	$\frac{2}{11}$	0	0	$\frac{14400}{11} + \frac{D}{110}$
0	θ_3	0	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{112}{55}$	0	$\frac{28}{55}$	$-\frac{7}{11}$	0	0	0	$\frac{4}{110}$	$\frac{8}{11}$	0	1	$-\frac{8400}{11} + \frac{4D}{110}$
0	η_4	0	$-\frac{12}{11}$	$-\frac{82}{55}$	0	$-\frac{7}{55}$	$-\frac{1}{11}$	1	0	0	$-\frac{1}{110}$	$-\frac{2}{11}$	0	0	$\frac{18600}{11} - \frac{D}{110}$
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4000
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
0	θ_2	0	$\frac{5}{11}$	$\frac{16}{11}$	0	$-\frac{20}{55}$	$\frac{5}{11}$	0	0	0	$\frac{5}{110}$	$\frac{10}{11}$	1	0	$\frac{6000}{11} + \frac{5D}{110}$
	$Z_i - C_i$	0	$\frac{34}{110}$	$\frac{654}{550}$	0	$\frac{84}{550}$	$\frac{12}{110}$	0	0	0	$\frac{12}{1100}$	$\frac{24}{110}$	0	0	

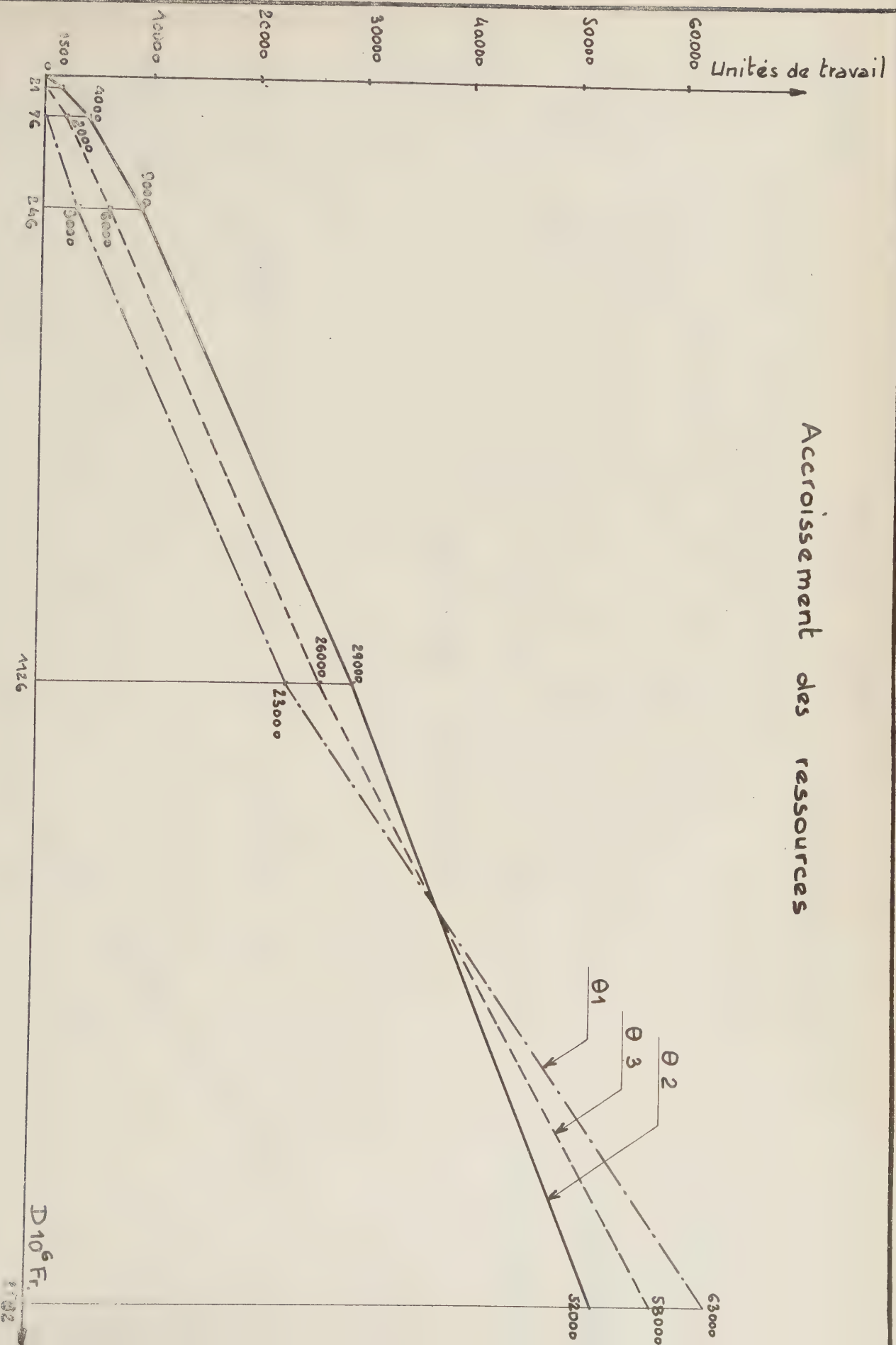
6

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	θ_1	0	$-\frac{19}{17}$	$-\frac{304}{85}$	$-\frac{11}{17}$	$\frac{21}{85}$	$\frac{3}{17}$	0	0	0	$\frac{3}{170}$	1	0	0	$\frac{3D}{170} - \frac{22800}{17}$
1,2	x_1	1	$\frac{22}{17}$	$\frac{182}{85}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{7}{85}$	$\frac{1}{17}$	0	0	0	$\frac{1}{170}$	0	0	0	$\frac{D}{170} + \frac{26400}{17}$
0	θ_3	0	$\frac{3}{17}$	$\frac{48}{85}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{28}{85}$	$-\frac{13}{17}$	0	0	0	$\frac{4}{170}$	0	0	1	$\frac{4D}{170} + \frac{3600}{17}$
0	η_4	0	$-\frac{22}{17}$	$-\frac{182}{85}$	$-\frac{2}{17}$	$-\frac{7}{85}$	$-\frac{1}{17}$	1	0	0	$\frac{1}{170}$	0	0	0	$\frac{24600}{17} - \frac{D}{170}$
0	η_5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4000
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
0	θ_2	0	$\frac{25}{17}$	$\frac{80}{17}$	$\frac{10}{17}$	$-\frac{10}{17}$	$\frac{5}{17}$	0	0	0	$\frac{5}{170}$	0	1	0	$\frac{5D}{170} + \frac{30000}{17}$
	$Z_i - C_i$	0	$\frac{94}{170}$	$\frac{1674}{850}$	$\frac{24}{170}$	$\frac{84}{850}$	$\frac{12}{170}$	0	0	0	$\frac{12}{170}$	0	0	0	

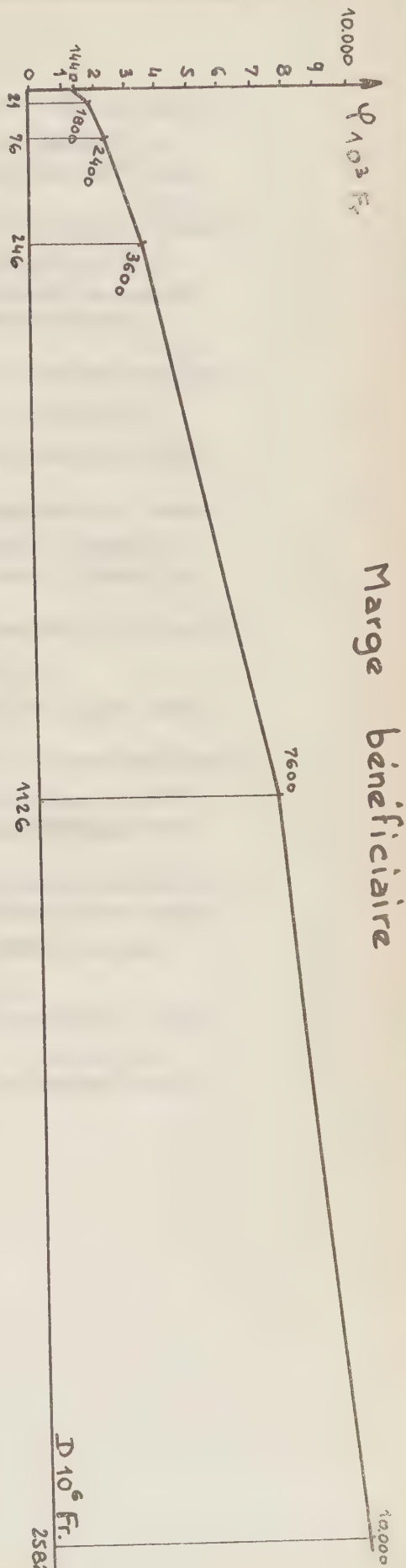
C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	θ_1	0	0	$-\frac{95}{55}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{35}{110}$	$\frac{5}{22}$	$-\frac{19}{22}$	0	0	$\frac{5}{220}$	1	0	0	$-\frac{28500}{11} + \frac{5D}{220}$
1,2	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3000
0	θ_3	0	0	$\frac{15}{55}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{35}{110}$	$-\frac{17}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	0	$\frac{5}{220}$	0	0	1	$\frac{4500}{11} + \frac{5D}{220}$
1	x_2	0	1	$\frac{91}{55}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{110}$	$\frac{1}{22}$	$-\frac{17}{22}$	0	0	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{D}{220} - \frac{24600}{22}$
0	η_5	0	0	$-\frac{91}{55}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{7}{110}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{17}{22}$	1	0	$-\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{56300}{11} - \frac{D}{220}$
0	η_6	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
0	θ_2	0	0	$\frac{25}{11}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{15}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{25}{22}$	0	0	$\frac{5}{220}$	0	1	0	$\frac{37500}{11} + \frac{5D}{220}$
$Z_i \cdot C_i$		0	0	$\frac{50}{55}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{110}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{94}{220}$	0	0	$\frac{1}{220}$	0	0	0	

C_i		1,2	1	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	P_i	x_1	x_2	x_3	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3	P_0
0	θ_1	0	0	0	$-\frac{41}{91}$	$\frac{35}{91}$	$\frac{25}{91}$	$-\frac{152}{91}$	$-\frac{95}{91}$	0	$\frac{50}{1820}$	1	0	0	$-\frac{722000}{91} + \frac{5D}{182}$
1,2	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3000
0	θ_3	0	0	0	$\frac{40}{91}$	$\frac{28}{91}$	$-\frac{71}{91}$	$\frac{24}{91}$	$\frac{15}{91}$	0	$\frac{2}{91}$	0	0	1	$\frac{114000}{91} + \frac{2D}{91}$
1	x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4000
0,6	x_3	0	0	1	$\frac{5}{91}$	$\frac{7}{182}$	$\frac{5}{182}$	$-\frac{85}{182}$	$-\frac{55}{91}$	0	$\frac{5}{1820}$	0	0	0	$\frac{281500}{91} + \frac{5D}{1820}$
0	η_6	0	0	0	$-\frac{5}{91}$	$-\frac{7}{182}$	$-\frac{5}{182}$	$\frac{85}{182}$	$\frac{55}{91}$	1	$-\frac{5}{1820}$	0	0	0	$\frac{645500}{91} - \frac{5D}{1820}$
0	θ_2	0	0	0	$\frac{30}{91}$	$-\frac{35}{91}$	$\frac{30}{182}$	$\frac{200}{182}$	$\frac{175}{91}$	0	$\frac{3}{182}$	0	1	0	$\frac{950000}{91} + \frac{3D}{182}$
$Z_i \cdot C_i$		0	0	0	$\frac{30}{910}$	$\frac{21}{910}$	$\frac{35}{910}$	$\frac{837}{910}$	$\frac{580}{910}$	0	$\frac{15}{9100}$	0	0	0	

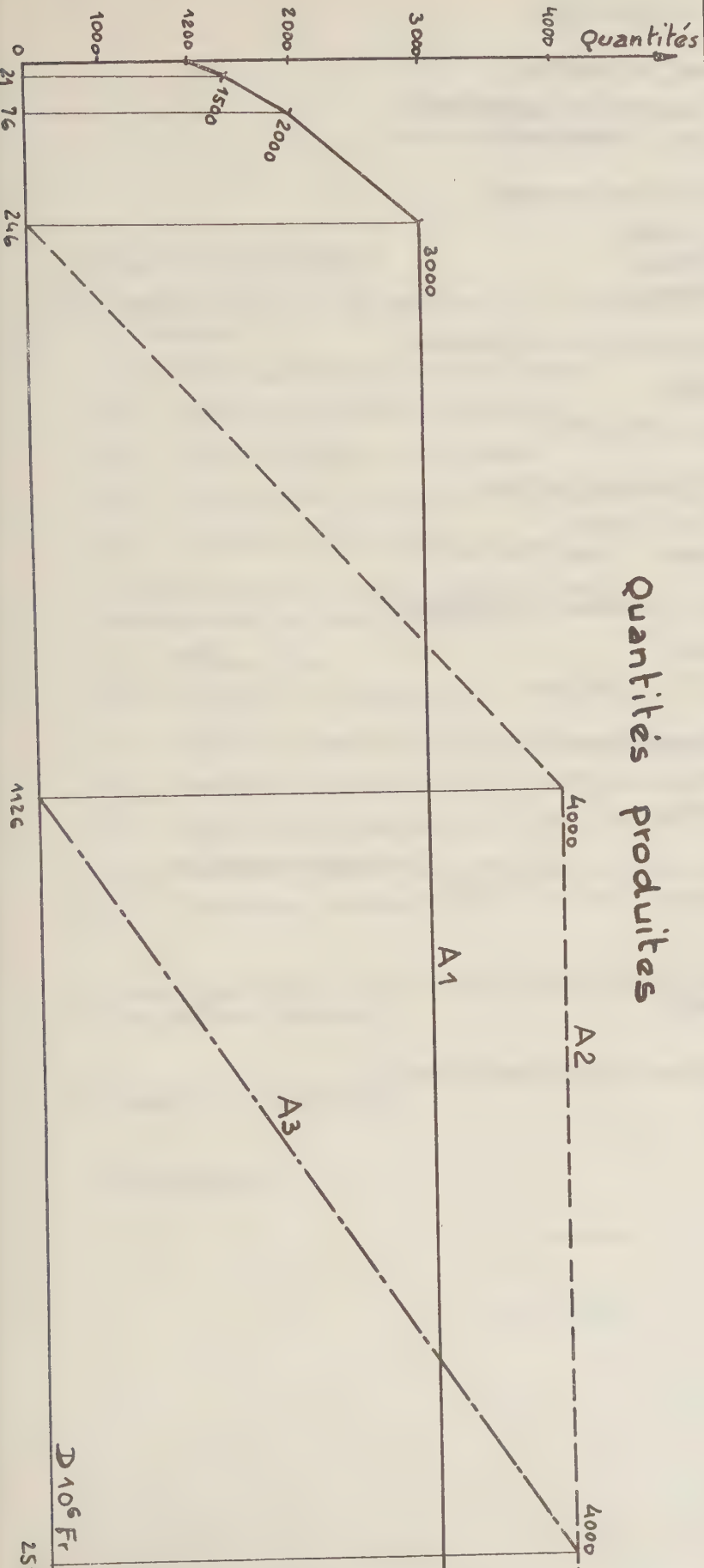
Accroissement des ressources



Marge bénéficiaire



Quantités produites



BIBLIOGRAPHIE

- An introduction to linear programming
A. CHARNES - W.W. COOPER - A. HENDERSON.
John WILEY and Sons Inc. - NEW-YORK
 - Linear inequalities and related systems.
H.W. KUHN and A.W. TUCKER
Princeton University Press
Princeton New-Jersey
 - Activity analysis of Production and Allocation
Tjalling C. KOOPMANS
John Wiley and Sons Inc. NEW-YORK
 - Linear programming and Economic Analysis
DORFMAN - SAMUEL SON - SOLOW
Mc GRAW-HILL Book Company - Inc. NEW-YORK
 - Scientific programming in Business and Industry
A. Vazsonyi
John Wiley and Sons - Inc. NEW-YORK
 - The structures of american economy
W.W. Leontieff
OXFORD UNIVERSITY PRESS.
 - Le problème général des plans de production d'énergie électrique
et les usines marémotrices, par R. GIBRAT -
Édition SOFRO.
 - Cours d'économie générale
M. ALLAIS
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
-

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
1 : Position du problème	1
2 : Première partie - Le problème de la maximisation du revenu.	3
2.1 : Etude qualitative des contraintes	3
2.2 : Quantification des contraintes	9
2.3 : Mise en équation du problème	12
2.4 : Extension de l'étude de programmation linéaire	19
2.5 : Discussion économique	29
3 : Deuxième partie - plan d'investissement - Recherche de la voie d'expansion	33
3.1 : Généralités	33
3.2 : Formulation mathématique	33
3.3 : Nouvelle formulation du problème d'expansion	48
3.4 : Chemin d'expansion - Plan d'investissement	48
3.5 : Signification économique de la nouvelle matrice SIMPLEXE	49
3.6 : Récapitulation	56
3.7 : Discussion économique	59
4 : Note complémentaire sur la résolution séquentielle des programmes linéaires.	61
5 : Exemple d'application	63
Bibliographie	80



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"Différentes formes de la loi des grands
nombres".

Vu et approuvé :

Paris, le15 Juin..... 1959

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

Jean SARRAILH

